Compito di Analisi Matematica 2

11 giugno 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|^\alpha + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(1) Trovare l'insieme dei punti di continuità di f al variare del parametro α.

(2) Dire per quali valori di α la funzione ammette limite per $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ e, nel caso, calcolare tale limite.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale α, si consideri il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{-\alpha x + y}{x^2+y^2}, \frac{\alpha y - x}{x^2+y^2} \right) \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

(1) Dire per quali valori di α il campo F è irrotazionale e per quali α è conservativo.

(2) Per i valori di α per i quali il campo è irrotazionale, calcolare l'integrale di F lungo la curva $\gamma(t) = (\sin(t), \cos^3(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 3. Siano $f_k\colon (0,1) \to [0,+\infty)$ funzioni misurabili, convergenti quasi ovunque a una funzione $f\colon (0,1) \to [0,+\infty)$.

(1) Fornire un esempio di funzioni f_k e f tali che non valga l'uguaglianza nella tesi del Lemma di Fatou.

(2) Si supponga inoltre che $f, f_k \in L^1(0,1)$ per ogni k e

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx\,.$$

Dimostrare che $\{f_k\}_k$ converge a f in $L^1(0,1)$, a meno di sottosuccessioni.

Esercizio 4. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = x(1-x^2-y^2)+y, \\ y' = y(1-x^2-y^2)-x. \end{cases}$$

(1) Studiare la stabilità dei punti stazionari del sistema, specificando se si tratta di selle, nodi o fuochi.

(2) Tracciare un grafico qualitativo delle traiettorie del sistema (si suggerisce di passare a coordinate polari). Dire se il sistema ammette cicli limite.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

(1) Notiamo che f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ per ogni $\alpha > 0$.
La continuità in $(0,0)$ è equivalente alla condizione
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$
Ponendo $X = x|x|^{\frac{\alpha}{2}-1}$ e $Y = y$, la condizione precedente si può scrivere come
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|X|^{\frac{2}{\alpha}}|Y|}{X^2+Y^2} = 0,$$
che passando a coordinate polari diventa
$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{\frac{2}{\alpha}-1}|\sin(\theta)\cos(\theta)| = 0,$$
che è soddisfatta se e solo se $\alpha \in (0,2)$. Pertanto la funzione f non è continua in $(0,0)$ se $\alpha \geq 2$, mentre lo è se $\alpha \in (0,2)$.

(2) Nel caso $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, lo stesso cambio di variabile dà
$$\lim_{(x,t)\to\infty} f(x,y) = \lim_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{\alpha}-1} \sin(\theta)\cos(\theta),$$
che esiste finito se e solo se $\alpha > 2$ e, in tal caso, il limite è uguale a 0.

Soluzione esercizio 2.

(1) Per $(x,y) \neq (0,0)$ calcoliamo
$$\mathrm{rot}F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2-y^2-2\alpha xy}{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2+2\alpha xy}{x^2+y^2} = \frac{-4\alpha xy}{x^2+y^2}$$
che è uguale a 0 se e solo se $\alpha = 0$.
Nel caso $\alpha = 0$, l'integrale del campo lungo la curva $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ è uguale a
$$\int_{\tilde{\gamma}} F = \int_0^{2\pi} (\sin(t), -\cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt = -2\pi,$$
quindi il campo è irrotazionale ma non conservativo.

(2) Poiché la curva γ è omotopa alla curva $\tilde{\gamma}$ e il campo F è irrotazionale per $\alpha = 0$, si ha
$$\int_\gamma F = \int_{\tilde{\gamma}} F = -2\pi.$$

Soluzione esercizio 3.

(1) Definiamo f_k come $f_k(x) = k$ per $x \in (0, 1/k)$ e $f_k(x) = 0$ per $x \in (1/k, 1)$. In questo caso, per $k \to +\infty$ si ha che $f_k(x) \to f(x) = 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ e

$$0 = \int_0^1 f(x)\,dx < \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx = 1.$$

(2) Supponiamo ora che

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

Sia $\{f_{k_h}\}$ un'estratta tale che

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 f_{k_h}(x)\,dx = \liminf_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

Se poniamo $g_h = \min(f_{k_h}, f)$, si ha $\lim_h g_h(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in (0, 1)$ e $g_h \leq f$ per ogni h. Per il Teorema di Convergenza Dominata abbiamo quindi che

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 g_h(x)\,dx = \int_0^1 f(x) = \lim_{h\to+\infty} \int_0^1 f_{k_h}(x)\,dx.$$

Di conseguenza, otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 |f_{k_h}(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq \lim_{h\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g_h(x))\,dx + \lim_{h\to+\infty} \int_0^1 (f_{k_h}(x) - g_h(x))\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4.

(1) Osserviamo che l'origine è l'unico punto stazionario del sistema. In tale punto, il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

La matrice associata ha autovalori $\lambda_\pm = 1 \pm i$, quindi l'origine è un fuoco instabile.

(2) Passando a coordinate polari il sistema diventa

$$\begin{cases} \rho' = \rho - \rho^3, \\ \theta' = -1, \end{cases}$$

da cui si ottiene facilmente un grafico qualitativo delle traiettorie del sistema. Osserviamo inoltre che il cerchio unitario è l'unico ciclo limite del sistema.

FIGURE 1. Traiettorie del sistema dell'esercizio 4.