Compitino di Analisi Matematica 2

15 maggio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Siano $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ due successioni di funzioni f_k, $g_k : A \to \mathbb{R}$ tali che

- esiste $M > 0$ tale che $\sup_{x\in A} |F_n(x)| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$;
- $g_k(x) \ge g_{k+1}(x) \ge 0$ per ogni $x \in A$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$;
- $\sup_{x\in A} g_k(x) \to 0$ per $k \to +\infty$.

Dimostrare che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)g_k(x)$ converge uniformemente in A.
(*Suggerimento*: si consiglia di scrivere $f_k(x) = F_k(x) - F_{k-1}(x)$)

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \le 1 \\ 1 & \text{se } 1 \le |x| \le \pi, \end{cases}$$

estesa in maniera 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare la serie di Fourier di f e dedurne la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}\,.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& x(t) - \alpha^2 y(t) \\ \dot{y}(t) &=& x(t) + \alpha y(t)\,. \end{cases}$$

(a) Determinare l'insieme dei punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Studiare la stabilità e la natura dei punti di equilibrio trovati al punto (a).

(b) Tracciare qualitativamente le traiettorie del sistema quando $\alpha = 1$.