0.1 Analisi qualitativa

Non sempre è possibile scrivere esplicitamente le soluzioni di un'equazione differenziale non lineare, e del resto non sempre un'espressione esplicita aiuta a comprendere l'andamento qualitativo delle *curve integrali*, ossia dei grafici di tali soluzioni. In molti casi, uno studio diretto dell'equazione differenziale permette di studiare il comportamento delle curve integrali senza conoscerne l'espressione analitica.

Esempio 0.1.1 Consideriamo l'equazione del primo ordine

$$y' = x\left[1 + \frac{1}{y}\right].$$

Il teorema di esistenza e unicità della soluzione è applicabile in tutti i punti (x, y) dei due semipiani $y > 0$ e $y < 0$: quindi per ogni punto (x_0, y_0), con $y_0 \neq 0$, passa una e una sola soluzione dell'equazione. Cominciamo col determinare le *curve isocline*, cioè le curve sulle quali la pendenza di tutte le curve integrali che le attraversano è la stessa. Nel nostro caso, le isocline sono le iperboli di equazione $y = \frac{x}{c-x}$: infatti una soluzione $y(x)$, che passi per un punto della forma $(x_0, \frac{x_0}{c-x_0})$, deve avere in tale punto pendenza pari a

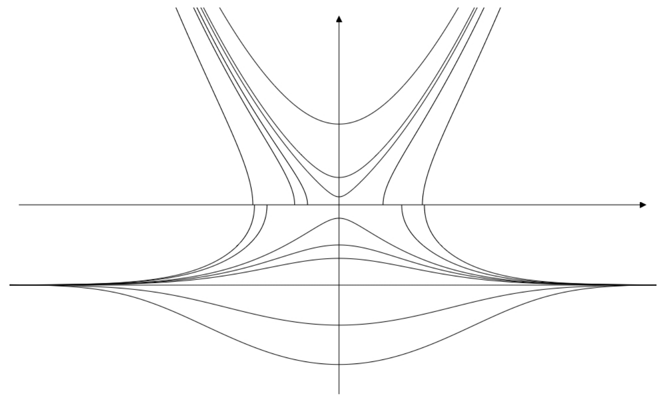
$$y'(x_0) = x_0\left(1 + \frac{1}{y(x_0)}\right) = x_0\left(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{c-x_0}}\right) = c,$$

dunque costante (al variare di tutte le soluzioni passanti per punti della curva). In particolare, sui punti dell'isoclina $y = -1$ le curve integrali hanno tangente orizzontale.
Dall'equazione differenziale ricaviamo, derivando rispetto a x,

$$y'' = 1 + \frac{1}{y} - x\frac{y'}{y^2} = \frac{(y+1)(y-x)(y+x)}{y^3},$$

e quindi l'intero piano può essere suddiviso in regioni di concavità e di convessità sulla base del segno dei fattori che compongono y''. In particolare le rette $y = \pm x$ sono costituite da punti di flesso per le soluzioni. Si osservi che per $x < 0$ e $y \notin [-1, 0]$ le soluzioni sono decrescenti, mentre sono crescenti per $y < 0$ e $-1 < y < 0$. Inoltre le soluzioni sono apri, ossia i grafici sono simmetrici rispetto alla retta verticale $x = 0$: infatti, dato che il secondo membro dell'equazione differenziale è una funzione dispari rispetto a x, se

$y(x)$ è soluzione, anche $y(-x)$ lo è.
La retta $y = -1$ è una curva integrale dell'equazione: quindi, per il teorema di unicità, essa non può essere attraversata da altre curve integrali. Infine osserviamo che per $y > 0$ risulta $|y'(x)| > |x|$, e quindi $|y'(x)| \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$; pertanto nessuna curva integrale presenta asintoti obliqui.



Si noti che l'equazione differenziale, essendo a variabili separabili, si risolve, ma la soluzione è espressa in forma implicita:

$$y - \ln|1 + y| = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 0.1.2 Consideriamo l'equazione

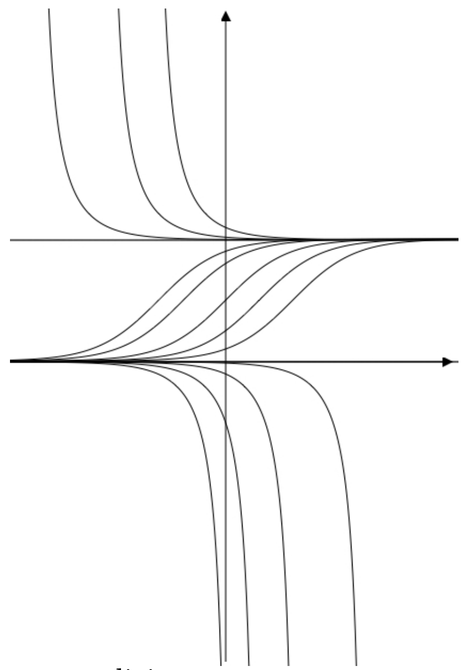
$$y' = 4y(1 - y).$$

In questo caso le curve isocline sono le rette $y = c$; vi sono inoltre le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = 1$, che separano il piano in tre zone, in ciascuna delle quali y' ha segno costante. Si ha anche

$$y'' = 16y(1 - y)(1 - 2y),$$

e quindi per $y > 1$ e per $0 < y < 1/2$ le soluzioni sono convesse.
È facile analizzare il comportamento asintotico delle soluzioni. Consideriamo una curva integrale uscente da un punto di coordinate $(0, a)$: se $a \in]0, 1[$, $y(x)$ è crescente ed è contenuta nella striscia $0 < y < 1$ (poiché non può attraversare le due curve integrali $y = 0$ e $y = 1$); dal teorema di esistenza segue che $y(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, posto $u_0 = \lim_{x\to\infty} y(x)$ e $v_0 = \lim_{x\to-\infty} y(x)$ (i limiti esistono essendo y crescente), si deve avere $\lim_{x\to\pm\infty} y'(x) = 0$, e dunque, passando al limite nell'equazione differenziale, si trova $4u_0(1 - u_0) = 0 = 4v_0(1 - v_0)$, da cui $u_0 = 1$ e $v_0 = 0$. Dunque le curve integrali costanti $y = 0$ e $y = 1$ sono asintoti orizzontali per tali

soluzioni.



Se invece $a > 1$, $y(x)$ è convessa e decrescente, quindi $u_0 = \lim_{x\to\infty} y(x)$ esiste finito e come sopra si ottiene $u_0 = 1$, mentre necessariamente la soluzione diverge per $x \to -\infty$, dato che $|y'| \geq 4|y|(|y| - 1) \to +\infty$ per $x \to -\infty$: dunque $v_0 = -\infty$.
Quando $a < 0$, simili considerazioni mostrano che $v_0 = 0$ e $u_0 = -\infty$. Si noti il diverso comportamento delle curve integrali attorno alla soluzioni stazionarie: al crescere di x, la soluzione $y = 1$ è un "attrattore" di soluzioni, mentre $y = 0$ è un "repulsore" di soluzioni.
In questo caso le soluzioni si determinano esplicitamente:

$$y(x) = \frac{ce^{4x}}{1 + ce^{4x}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 0.1.3 L'esempio precedente rientra in una importante sottoclasse di equazioni del primo ordine: le *equazioni autonome*, ossia quelle della forma

$$y' = F(y),$$

ove $F : J \to \mathbb{R}$ è un'assegnata funzione continua definita su un intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$. Dunque un'equazione differenziale è autonoma se il suo secondo membro non dipende esplitamente dalla variabile x.
È facile verificare che se $y(x)$ è una soluzione in $]x_1, x_2[$ dell'equazione sopra scritta, allora, qualunque sia $T \in \mathbb{R}$, la funzione $x \mapsto y(x + T)$ risolve l'equazione in $]x_1 - T, x_2 - T[$. Nel seguito supporremo per semplicità che F sia definita su tutto $\mathbb{R}$; si noti che questo *non implica* che ciascuna soluzione sia definita su tutto $\mathbb{R}$. È vero però che per descrivere tutte le soluzioni sarà sufficiente, a meno di una traslazione temporale, considerare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di y_0 in $\mathbb{R}$.
Analizziamo alcuni casi significativi. Se $F(y_0) = 0$, allora $y(x) \equiv y_0$ è una *soluzione stazionaria*, ossia costante. Se $F(y_0) < 0$ ed esiste $\overline{y} < y_0$ tale che $F(\overline{y}) = 0$, allora si vede facilmente che la soluzione $y(x)$ è definita per ogni $x > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = y_1$, ove y_1 è il *massimo* fra gli zeri di F minori di y_0. Similmente, se $F(y_0) > 0$ ed esiste $\overline{y} > y_0$ tale che $F(\overline{y}) = 0$, allora la soluzione $y(x)$ è definita per ogni $x > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = y_2$, ove y_2 è il *minimo* fra gli zeri di F maggiori di y_0. Se ne deduce che se esiste un intorno U di y_0 per cui

$$F(y) \begin{cases} > 0 & \text{per } y < y_0,\ y \in U \\ = 0 & \text{per } y = y_0 \\ < 0 & \text{per } y > y_0,\ y \in U, \end{cases}$$

allora la soluzione stazionaria $y(x) = y_0$ è asintoto per $x \to +\infty$ di soluzioni $y(x)$, sia "dall'alto" che "dal basso". Una condizione sufficiente affinché ciò accada è, ovviamente,

$$F \in C^1(\mathbb{R}), \quad F(y_0) = 0, \quad F'(y_0) < 0.$$

Si dice in tal caso che la soluzione stazionaria $y = y_0$ è *asintoticamente stabile.*
Se, invece, esiste un intorno U di y_0 per cui

$$F(y) \begin{cases} < 0 & \text{per } y < y_0,\ y \in U \\ = 0 & \text{per } y = y_0 \\ > 0 & \text{per } y > y_0,\ y \in U, \end{cases}$$

allora le soluzioni $y(x)$ "si allontanano" dalla soluzione stazionaria $y = y_0$ per $x \to +\infty$; ciò accade, ad esempio, quando $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(y_0) = 0$ e $F'(y_0) > 0$. In tal caso la soluzione stazionaria $y = y_0$ si dice *instabile.*

Discuteremo adesso alcuni esempi, che mettono in evidenza come l'analisi della situazione, benché concettualmente non difficile, si riveli talvolta assai complicata.

Esempio 0.1.4 Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^2 - \arctan^2 x.$$

Osserviamo anzitutto che il secondo membro verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità su tutto $\mathbb{R}^2$: quindi per ogni punto del piano passa una ed una sola traiettoria. Dunque i grafici di due soluzioni distinte non possono intersecarsi. Inoltre, se $y(x)$ è soluzione, allora anche $v(x) = -y(-x)$ è soluzione: ciò significa che i grafici sono simmetrici rispetto all'origine e pertanto è sufficiente analizzarli nel semipiano $x \geq 0$. Le soluzioni sono crescenti nella regione $|y| > |\arctan x|$ e decrescenti nella regione $|y| < |\arctan x|$; dunque i grafici attraversano $y = \pm \arctan x$ con tangente orizzontale. Le regioni di convessità sono di difficile individuazione, poiché

$$y'' = 2yy' - 2\frac{\arctan x}{1+x^2} = 2y(y^2 - \arctan^2 x) - 2\frac{\arctan x}{1+x^2},$$

e non è per niente agevole lo studio del segno di y''. Tuttavia possiamo notare che

$$y^2 - \frac{\pi^2}{4} < y' < y^2,$$

quindi, detta y_b la soluzione tale che $y(0) = b$, per confronto si ha $z(x) < y_b(x) < w(x)$, ove w e z sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w' = w^2 \\ w(0) = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = z^2 - \frac{\pi^2}{4} \\ z(0) = b. \end{cases}$$

Con calcoli standard si trova dunque

$$z(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1 + \frac{b-\pi/2}{b+\pi/2}e^{\pi x}}{1 - \frac{b-\pi/2}{b+\pi/2}e^{\pi x}} < y_b(x) < \frac{b}{1-xb} = w(x) \qquad \forall x > 0.$$

È immediato constatare che

$$w(x) \to +\infty \text{ per } x \to \frac{1}{b}, \qquad z(x) \to +\infty \text{ per } x \to \frac{1}{\pi}\ln\frac{b+\pi/2}{b-\pi/2},$$

e dunque anche y_b ha un asintoto verticale $x = x_b$, con

$$\frac{1}{b} < x_b < \frac{1}{\pi}\ln\frac{b+\pi/2}{b-\pi/2};$$

in particolare, se $b \to \infty$ l'ascissa dell'asintoto di y_b tende a 0.
Più in generale, se $b > 0$ ed esiste $\xi > 0$ tale che $y_b(\xi) = \pi/2$, allora sarà $z(x) < y_b(x) < w(x)$, ove w e z sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w' = w^2 \\ w(\varepsilon+\xi) = y_b(\varepsilon+\xi), \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = z^2 - \frac{\pi^2}{4} \\ z(\varepsilon+\xi) = y_b(\varepsilon+\xi), \end{cases}$$

ove $\varepsilon > 0$, e si trova di conseguenza per $x > \varepsilon + \xi$

$$z(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{y_b(\varepsilon+\xi)-\pi/2}{y_b(\varepsilon+\xi)+\pi/2} e^{\pi(x-\varepsilon-\xi)}}{1 - \frac{y_b(\varepsilon+\xi)-\pi/2}{y_b(\varepsilon+\xi)+\pi/2} e^{\pi(x-\varepsilon-\xi)}} < y_b(x) < \frac{y_b(\varepsilon+\xi)}{1-(x-\varepsilon-\xi)y_b(\varepsilon+\xi)} = w(x).$$

Dunque, nuovamente, la y_b ha un asintoto verticale $x = x_b$ con

$$\varepsilon + \xi + \frac{1}{y_b(\varepsilon+\xi)} < x_b < \varepsilon + \xi + \frac{1}{\pi} \ln \frac{y_b(\varepsilon+\xi)+\pi/2}{y_b(\varepsilon+\xi)-\pi/2}.$$

Se invece $b > 0$ è sufficientemente piccolo, allora il grafico di y_b attraversa la curva $y = \arctan x$: infatti si ha $y_b(x) < \frac{b}{1-xb}$ e il grafico di quest'ultima funzione sicuramente attraversa quello di $\arctan x$ purché b sia piccolo (infatti per $x = \pi/4$ si ha $\frac{b}{1-\frac{\pi}{4}b} < \arctan \pi/4 = 1$ purché $b < 4/(4+\pi)$).
Dunque esiste il numero positivo

$$\alpha = \inf \left\{ b > 0 : \ \exists \xi > 0 : \ y_b(\xi) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Se allora $b > \alpha$, la corrispondente soluzione cresce fino al suo asintoto verticale $x = x_b$; se $0 < b < \alpha$, la soluzione cresce fino ad attraversare la curva $y = \arctan x$, dove ha un massimo assoluto, poi inizia a decrescere, come vedremo meglio fra poco.
Se $b = \alpha$, la soluzione y_α separa le soluzioni con asintoto verticale da quelle definitivamente decrescenti: non è difficile rendersi conto che essa dovrà essere crescente (perché è un estremo inferiore di funzioni crescenti) ma restare sotto la quota $y = \pi/2$ per definizione di α. Dunque per questa soluzione si ha

$$\arctan x < y_\alpha(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0.$$

Osserviamo adesso che se una soluzione comincia ad essere decrescente, tale resterà per sempre: infatti per tornare a crescere dovrebbe attraversare con pendenza nulla, venendo dall'alto, la curva $y = -\arctan x$, che ha pendenza negativa, e questo è impossibile. Pertanto queste soluzioni non possono che tendere all'asintoto orizzontale $y = -\pi/2$.
Se $b = 0$ la soluzione parte con pendenza nulla, cosicché viene immediatamente a trovarsi nella regione di decrescenza. Quindi anch'essa decresce fino all'asintoto orizzontale $y = -\pi/2$.
Infine, se $b < 0$ la soluzione cresce, fino ad attraversare la curva $y = \arctan x$, dopodiché ancora una volta ls soluzione decresce fino all'asintoto orizzontale

$y = -\pi/2$. Si noti che per ogni $b < 0$ la soluzione $y_b(x) \equiv y(x)$ diventa prima o poi decrescente: infatti supponiamo per assurdo che $y(x)$ resti crescente e dunque sempre minore di $-\arctan x$: possiamo confrontare $y(x)$ con una soluzione $u(x)$ di dato iniziale $b' > 0$ piccolo, notando che la differenza $y - u$ verifica

$$y' - u' = y^2 - u^2, \qquad y(0) - u(0) = b - b' < 0.$$

Scegliamo un'ascissa x_0 sufficientemente grande in modo che $u(x_0) < 0$; dunque $v = y - u$ verifica

$$\frac{v'}{v} = y + u < -\frac{\pi}{2} + \max u = -K < 0 \qquad \forall x > x_0.$$

Ne segue facilmente

$$|v(x)| \leq |v(x_0)| e^{-K(x-x_0)}.$$

D'altra parte,

$$y(x) < -\frac{\pi}{2} < -\arctan x < u(x) \qquad \forall x > 0,$$

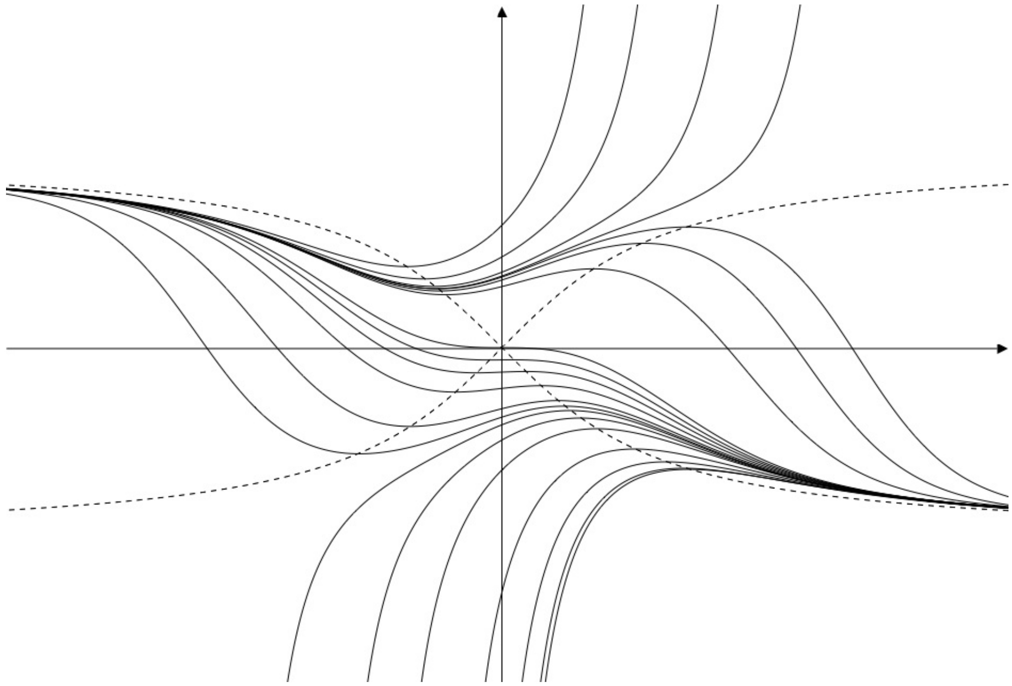
quindi otteniamo

$$|v(x_0)| e^{-K(x-x_0)} \geq |v(x)| = u(x) - y(x) > \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \forall x > x_0.$$

Ciò tuttavia è assurdo perché per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x}\,.$$

Possiamo ricapitolare tutto quanto detto con questo disegno approssimativo:



Esempio 0.1.5 Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

Essa è definita per $x, y \geq 0$ ma rispetta le ipotesi del teorema di esistenza e unicità solo quando $x, y > 0$. Nei punti di ordinata nulla, infatti, succede che la soluzione con dato iniziale $y(x_0) = 0$ è definita al più "nel passato", ossia per $0 \leq x < x_0$, ma non "nel futuro", poiché si ha $y'(x_0) = -\sqrt{x_0} < 0$ e quindi il grafico esce immediatamente dal dominio, facendo perdere significato all'equazione differenziale. Analizziamo dunque la situazione nel primo quadrante aperto. Le soluzioni sono sempre positive; la zona di crescenza è il settore $y > x$, mentra la retta $y = x$ viene attraversata con pendenza nulla. Calcoliamo la regione di convessità: si ha, con qualche calcolo,

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{y} - x}{2\sqrt{x}\sqrt{y}};$$

dunque se $x \leq 1$ le soluzioni sono concave, mentre se $x > 1$ le soluzioni sono convesse per $y \geq \frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2} := g(x)$ e concave per $0 < y \leq g(x)$. La funzione $g(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to 1^+$, mentre per $x \to +\infty$ si ha

$$g(x) - x = x\left(\frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2} - 1\right) = \frac{x(2\sqrt{x}-1)}{x - 2\sqrt{x} + 1} \simeq 2\sqrt{x},$$

cosicché $g(x)-x \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Ne segue che g ha un minimo assoluto per $x = 4$, con $g(4) = 16$, ed ha necessariamente un flesso fra 4 e $+\infty$. Osserviamo adesso un fatto importante: se $y(x_0) = g(x_0)$, ossia una soluzione taglia il luogo dei flessi g, allora $x_0 > 1$ e

$$y'(x_0) = \sqrt{y(x_0)} - \sqrt{x_0} = \sqrt{g(x_0)} - \sqrt{x_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}-1} - \sqrt{x_0} = \frac{\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}-1},$$

ed è facile verificare che risulta $y'(x_0) > g'(x_0)$; ciò significa che $y(x)$ diventa convessa e non può più riattraversare la curva $y = g(x)$ in un altro punto $x_0' > x_0$ poiché altrimenti in tale punto dovrebbe aversi la disuguaglianza contraria $y'(x_0') \geq g'(x_0')$. Dunque tale soluzione tende a $+\infty$ senza asintoto verticale. Nemmeno può esserci un asintoto obliquo $y = ax + b$, poiché in tal caso avremmo $y'(x) \to a$ e $\sqrt{y(x)} - \sqrt{ax+b} \to 0$ per $x \to \infty$, mentre l'equazione differenziale fornirebbe invece

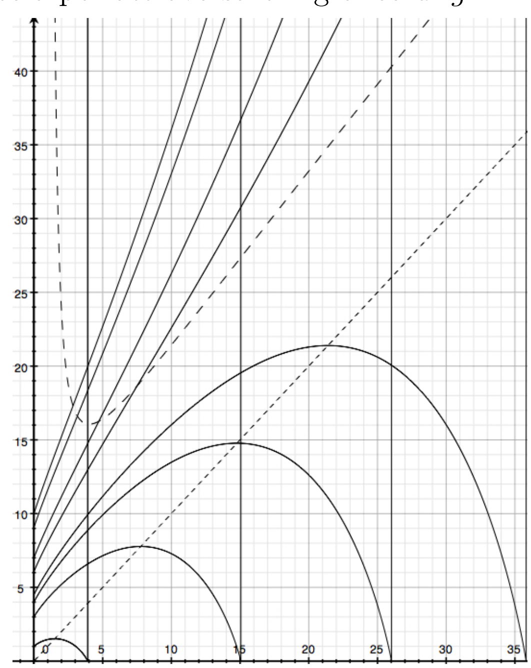
$$y'(x) = \sqrt{y(x)} - \sqrt{x} \simeq \frac{(a-1)x + b}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{x}} \simeq \begin{cases} +\infty & \text{se } a \neq 1 \\ 0 & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Se invece la soluzione non taglia il grafico di g, essa rimane concava e tende a 0 in tempo finito, ossia per $x \to \overline{x}$ con $\overline{x}$ opportuno. La soluzione taglia o no il grafico di g a seconda del suo valore iniziale b: se b è molto piccolo, la pendenza di $y(x)$ è troppo piccola per attraversare il grafico di g.

La famiglia delle soluzioni definitivamente convesse è chiaramente separata da quella delle soluzioni che restano concave, per mezzo di una soluzione il cui dato iniziale α è definito da

$$\alpha = \sup\{b > 0 : \ y_b < g\} :$$

tale soluzione $y_\alpha(x)$ è l'unica concava e crescente nell'intera semiretta $[0, \infty[$: essa aderirà sempre più a $g(x)$, nel senso che $y_\alpha(x) - g(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.



Esempio 0.1.6 Analizziamo l'equazione

$$y' = xy\, e^{-y^2}.$$

Vi è la soluzione nulla $y = 0$; inoltre se $y(x)$ è soluzione anche $y(-x)$ e $-y(x)$ sono soluzioni: pertanto basta studiare cosa succede nel primo quadrante. In questa regione tutte le soluzioni (tranne ovviamente $y = 0$) sono crescenti. Troviamo la curva dei flessi: dopo qualche calcolo si ottiene

$$y'' = e^{-y^2}[y + x(1 - 2y^2)y'] = y\, e^{-y^2}[1 + x^2 e^{-y^2}(1 - 2y^2)],$$

da cui $y'' \geq 0$ se e solo se

$$0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oppure} \quad y > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}.$$

La funzione

$$h(y) = \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}, \qquad y > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tende a $+\infty$ per $y \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^+$ e per $y \to \infty$; inoltre, si verifica facilmente che

$$h'(y) = \frac{y\, e^{y^2/2}(2y^2 - 3)}{(2y^2 - 1)^{3/2}},$$

e in particolare h ha l'unico punto di minimo relativo, dunque anche di minimo assoluto, per $x = \frac{e^{3/4}}{\sqrt{2}}$, dove vale $\sqrt{3/2}$.
Consideriamo una soluzione y con $y(0) = b > 0$: essa parte con tangente orizzontale ed è inizialmente convessa. Inoltre essa tende a $+\infty$ per $x \to \infty$: infatti non può avere un asintoto orizzontale per $x \to \infty$, perché dall'equazione differenziale seguirebbe che $y'(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$ e ciò è assurdo. Se y rimanesse convessa per ogni $x > 0$, non appena $y(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ si avrebbe

$$y'(x) = xy\, e^{-y^2} \leq e^{-y^2/2} \frac{y}{\sqrt{2y^2 - 1}},$$

da cui $y'(x) \to 0$ per $x \to \infty$: ciò è impossibile, essendo $y(x)$ convessa e crescente. Pertanto tutte le soluzioni con $b > 0$ finiscono per diventare concave. Per giunta, esse non possono pù tornare convesse: infatti in un ipotetico punto (x, y) in cui il grafico di $y(x)$ tagliasse nuovamente la curva $x = h(y)$ dovremmo avere

$$y > \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x = h(y), \qquad y'(x) \geq (h^{-1})'(x),$$

ossia

$$x = \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2y^2 - 1}}, \qquad xye^{-y^2} = y'(x) \geq (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{(2y^2-1)^{3/2}}{y\, e^{y^2/2}(2y^2-3)};$$

ne seguirebbe via via, equivalentemente,

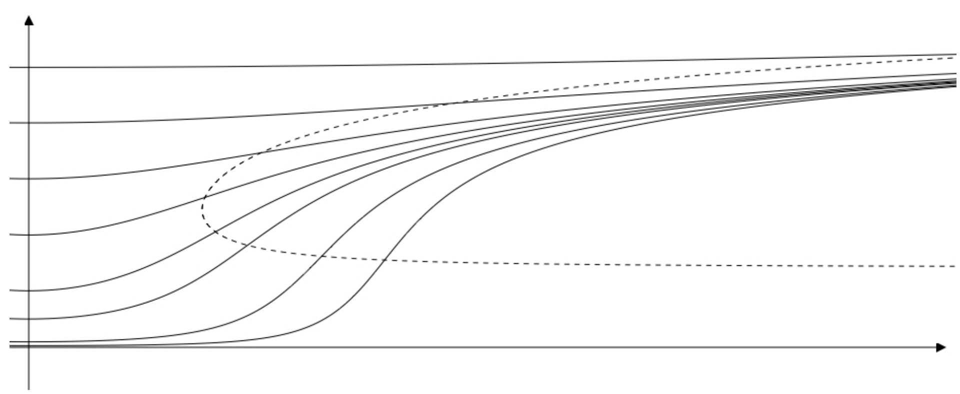
$$xye^{-y^2} \geq \frac{(2y^2-1)^{3/2}}{y\, e^{y^2/2}(2y^2-3)} = \frac{(2y^2-1)}{xy(2y^2-3)},$$

$$x^2y^2\, e^{-y^2} = \frac{y^2}{2y^2-1} \geq \frac{2y^2-1}{2y^2-3},$$

$$(2y^2-3)y^2 \geq 4y^4 - 4y^2 + 1,$$

$$2y^4 - y^2 + 1 \leq 0,$$

e questo è impossibile perché la quantità a primo membro è un trinomio sempre positivo.
Notiamo infine che $y(x)$ tende a $+\infty$ con $y'(x) \to 0$, quindi la crescenza è di tipo logaritmico (e in particolare senza asintoti obliqui).



Esempio 0.1.7 Consideriamo infine l'equazione

$$y' = x^2 - y^2.$$

Il teorema di esistenza e unicità vale in tutto il piano. Non vi sono soluzioni costanti; inoltre se $y(x)$ è soluzione, anche $-y(-x)$ lo è: quindi è sufficiente analizzare cosa succede nel semipiano $x \geq 0$. La zona di crescenza delle soluzioni è $-x \leq y \leq x$, e ovviamente la zona di decrescenza è $|y| > x$. Si ha poi

$$y'' = 2x - 2yy' = -2yx^2 + 2x + 2y^3;$$

quindi le soluzioni sono convesse nella regione descritta dalla disuguaglianza $yx^2 - x - y^3 \leq 0$, e dunque, risolvendo la disequazione di secondo grado in $x \geq 0$, si ha

$$y'' \geq 0 \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{1+4y^4}+1}{2y} & \text{se } y > 0 \\ x \geq \dfrac{\sqrt{1+4y^4}-1}{2|y|} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Con calcoli un po' laboriosi si verifica che per la funzione $g(y) = \frac{\sqrt{1+4y^4}+1}{2y}$, $y > 0$, si ha

$$g(y) \simeq \frac{1}{y} \text{ per } \; y \to 0^+, \quad \min g = g\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/4}}\right) = \frac{3^{3/4}}{2^{1/2}}, \quad g(y) \simeq y \text{ per } \; y \to \infty,$$

ed in particolare, poiché risulta $g(y) > y$, il grafico di g è interamente contenuto nella zona di crescenza; calcoli altrettanto laboriosi mostrano che invece la funzione $h(y) = \frac{\sqrt{1+4y^4}-1}{2|y|}$, $y < 0$, soddisfa

$$h(y) \simeq -2y^3 \text{ per } \; y \to 0^-, \quad h(y) \simeq -y \text{ per } \; y \to -\infty,$$

ed in particolare, dato che $h(y) < |y|$, il grafico di h è interamente contenuto nella zona di decrescenza. Notiamo anche che

$$h'(y) = \frac{1 - 4y^2 - \sqrt{1+4y^4}}{2y^2\sqrt{1+4y^4}} < 0, \qquad h'(y) \to -1 \text{ per } \; y \to -\infty.$$

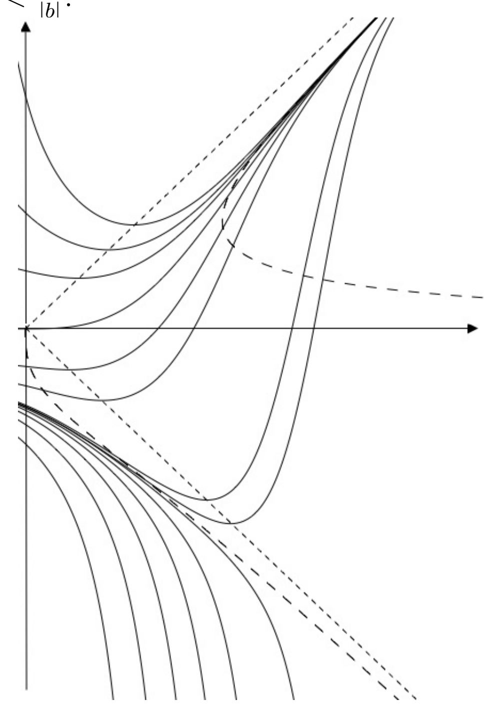
Consideriamo una soluzione $y(x)$ con $y(0) = b$. Se $b > 0$, la soluzione è inizialmente decrescente e convessa; dopo aver raggiunto e superato il suo minimo, entra necessariamente (in quanto la curva dei flessi ha per asintoto la retta $y = x$) nella zona di concavità, e lì resta, tendendo all'infinito in modo concavo: non può infatti tornare convessa, perché in tal caso finirebbe

per riattraversare la retta $y = x$ e ciò è impossibile, non essendo nulla la sua derivata. Però la $y(x)$ ha l'asintoto obliquo $y = x$ per $x \to \infty$. Infatti, per concavità, $x - y(x)$ è decrescente: quindi ha limite q per $x \to +\infty$; ma allora $y(x)$ ha l'asintoto $y = x - q$ e dunque $y'(x) \to 1$, e dall'equazione differenziale segue allora subito $q = 0$ (altrimenti $y'(x)$ tenderebbe all'infinito).
Se $y(0) = 0$, la soluzione entra subito nella zona di crescenza, poi da convessa diventa concava ed evolve come le soluzioni uscenti da valori $b > 0$.
Se $y(0) = b < 0$, le cose cambiano. Se $|b|$ è sufficientemente piccolo, la soluzione deve passare da decrescente a crescente e poi da convessa a concava, per poi evolvere come le soluzioni precedenti: infatti $y'(x)$ è piccolo, mentre la pendenza della curva $x = h(y)$, cioè $1/h'(y)$, è negativa e grande in modulo, e quindi le due curve si intersecano.
Se invece $|b|$ è sufficientemente grande, la $y(x)$ sta sotto la retta $y = b + y'(0)x$, ove $|y'(0)| = b^2$, mentre per $x \geq a$ la curva $x = h(y)$ sta sopra la retta $y = h^{-1}(a) + (h^{-1})'(a)(x - a)$, che ha pendenza vicina a -1 e tocca l'asse y in $h^{-1}(a) - (h^{-1})'(a)a > b$. Quindi $y(x)$ resta sempre concava e tende a $-\infty$; poiché inoltre $y' \leq -y^2$ si vede agevolmente che $y(x) \leq \frac{b}{1+bx}$ e dunque $y(x)$ ha un asintoto verticale di ascissa $x_b < \frac{1}{|b|}$.

Vi sarà dunque una soluzione "separatrice" tra le curve $y_b(x)$ con dato iniziale $b < 0$ che restano concave e le curve $y_b(x)$ con $b < 0$ che sono prima concave, poi convesse e infine nuovamente concave. Tale soluzione separatrice avrà dato iniziale

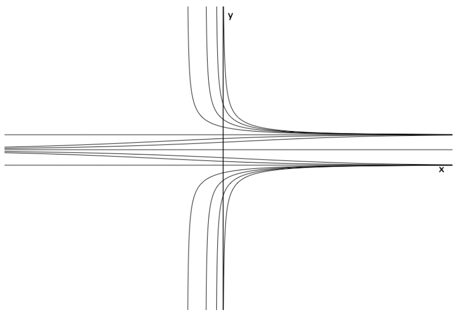
$$\alpha = \sup\{b < 0 : y_b'' < 0 \text{ in } [0, x_b[\,\},$$

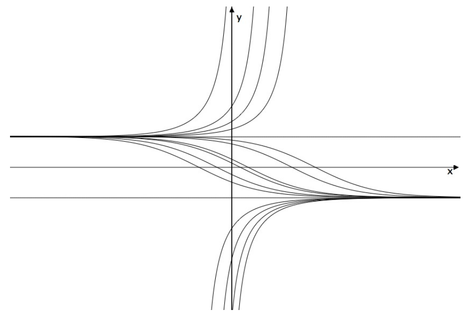
e sarà sempre concava, definita sull'intera semiretta $[0, \infty[$, e si avvicinerà indefinitamente alla curva dei flessi senza mai attraversarla, avendo dunque l'asintoto obliquo $y = -x$.



Esercizi

1. Si verifichi che il comportamento qualitativo delle soluzioni delle equazioni
$$y' = y(1-y)\left(y - \frac{1}{2}\right), \qquad y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$
è quello descritto nelle figure sottostanti.





2. Determinare il comportamento qualitativo delle soluzioni delle seguenti equazioni:

(i) $y' = x^2 + y^2$, (ii) $y' = \frac{x^2y^2}{1+y^2}$,

(iii) $y' = \frac{x^2y^3}{1+y^2}$, (iv) $y' = |y|(1-y)\frac{x}{1+x^2}$,

(v) $y' = \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, e^{-y^2}$, (iv) $y' = x^3(e^{2-y^2} - 1)$.