Parte I

Relazioni di ricorrenza

Capitolo 1

Relazioni di ricorrenza

1.1 Modelli

Nel seguente capitolo studieremo le relazioni di ricorrenza. Ad esempio sono relazioni di ricorrenza

$$a_n = 2a_{n-1} + n, \quad a_n = 2ia_{n-3} + 2^n, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}} + e^{a_{n-2}},$$

$$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \sqrt{2}a_{n-2} + a_{n-4} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}, \quad a_n = 2a_{n/2} + 4.$$

Definizione 1.1. Una *relazione di ricorrenza* è una formula ricorsiva che esprime il termine n-esimo di una successione (in generale a valori complessi) in relazione ai precedenti. La relazione si dice di *ordine* r se il termine n-esimo è espresso in funzione al più dei termini $(n-1)$-esimo, ..., $(n-r)$-esimo.

Negli esempi precedenti, la prima relazione ha ordine 1, la seconda 3, la terza 2, la quarta 4 e l'ultima non ha ordine (infatti $n - n/2$ tende all'infinito per $n \to +\infty$).

Definizione 1.2. Una *soluzione* di una relazione di ricorrenza è una successione a valori complessi, che verifica la relazione. Diremo *soluzione generale* della relazione la famiglia di tutte le soluzioni.

Esempio 1.3. Verificare che la successione $a_n = 3(2^n) - 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}$, è una soluzione della relazione $a_n = 2a_{n-1} + n$.

Data una relazione di ricorrenza di ordine r, assegnati ad arbitrio r termini consecutivi, risultano univocamente determinati i termini successivi. Nella relazione $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ la conoscenza del solo valore $a_0 = 2$ non è sufficiente per determinare univocamente i valori a_k: se viene dato, ad esempio, anche il valore $a_1 = 3$ allora è possibile calcolare $a_2 = 2 + 3 = 5$, $a_3 = 3 + 5 = 8$, $a_4 = 8 + 5 = 13$ e così via.

Esempio 1.4. Trovare una relazione di ricorrenza per calcolare il numero a_n di n-sequenze senza ripetizione di $I_n = \{1, ..., n\}$.

Soluzione. La posizione di 1 può essere scelta in n modi; vi sono poi a_{n-1} modi per sistemare i numeri rimanenti. Pertanto $a_n = na_{n-1}$:

$$a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2} = \dots n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \times 1 = n!$$

Esempio 1.5. Un bambino ha una scala con n gradini da salire e ad ogni passo egli può salire uno oppure due gradini: trovare una relazione di ricorrenza che conti il numero a_n di diversi possibili modi di salire le scale.

Soluzione. È facile osservare che $a_1 = 1, a_2 = 2$ (due passi da un gradino oppure un passo da due gradini) e $a_3 = 3$; per $n = 4$ in Figura 1.1 si mostra un modo per salire le scale che consiste in un passo da un gradino, un passo da due e un passo da uno, le altre possibilità sono un passo

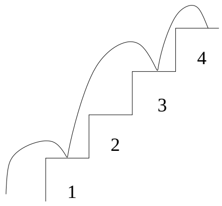


Figura 1.1:

da due gradini preceduto o seguito da due passi da uno, oppure due passi da due, oppure quattro passi da uno, in totale $a_4 = 5$. Sia ora $n \geq 5$: se il primo passo lo facciamo da un gradino, vi sono a_{n-1} possibili modi di salire gli altri. Se con il primo passo saliamo due gradini, vi sono a_{n-2} modi per salire i rimanenti: si ha quindi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Tale relazione è detta *relazione di Fibonacci*: i numeri a_n generati dalla relazione di Fibonacci con dati iniziali $a_0 = a_1 = 1$ sono detti *numeri di Fibonacci*: essi iniziano con $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$.

Esempio 1.6. Supponiamo di disegnare n rette su un piano in posizione generale (non parallele e tre rette non si possono intersecare in uno stesso punto). In quante regioni risulta diviso il piano?

Soluzione. Esaminiamo la situazione per valori piccoli di n: con una retta, il piano risulta diviso in due regioni, con due rette in quattro regioni ($a_2 = 4$), con tre rette in sette regioni.

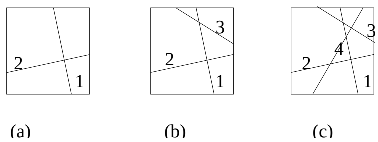


Figura 1.2:

In generale tracciando la n-esima retta, si dividono n delle regioni preesistenti, e dunque $a_n = n + a_{n-1}$.

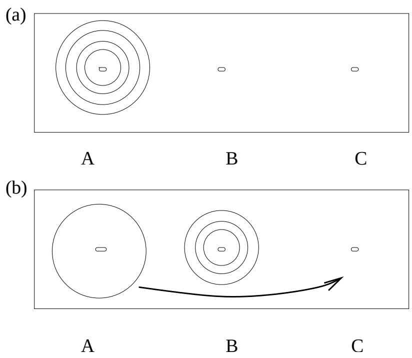


Figura 1.3: La torre di Hanoi

Esempio 1.7. La torre di Hanoi è un gioco che consiste di n anellini di varia misura e tre bastoncini sui quali sono infilati gli anelli: all'inizio del gioco gli anelli sono posizionati tutti sul primo bastoncino (quello a sinistra) in modo decrescente, cioè a partire da quello più grande in fondo fino al minore in cima (come rappresentato in Figura 1.3(a)). Distribuendo gli anelli tra i bastoncini si vuole ricostruire la stessa torre di anelli sul bastoncino a destra: la difficoltà consiste nel fatto che ogni volta che un anello deve essere spostato su un bastoncino, esso deve essere minore tra tutti gli anelli già presenti sul bastoncino; in altre parole ad ogni passo del gioco ci deve essere una pila decrescente di anelli (o nessuna pila) su ogni bastoncino.

Trovare una relazione di ricorrenza che dia il numero minimo a_n di mosse necessarie per la torre di Hanoi con n anelli.

Soluzione. L'osservazione fondamentale è che se gli n anelli sono su A e vogliamo muoverli in C, dobbiamo innanzitutto "liberare" l'anello più grande, spostando tutti gli altri anelli su B, per poterlo piazzare in C: ad un certo punto quindi ci troviamo necessariamente con l'anello più grande in C e una torre di Hanoi con $n-1$ anelli in B. Per arrivare a questa tappa abbiamo bisogno di perlomeno $a_{n-1}+1$ mosse: a_{n-1} per formare una torre di Hanoi con $n-1$ dischi su B ed una per spostare il disco grande da A su C. Dobbiamo poi spostare la torre di Hanoi con $n-1$ dischi da B su C: ciò necessita almeno altre a_{n-1} mosse. Si ottiene così la relazione di ordine uno

$$a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Dato che $a_1 = 1$, abbiamo $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 15$, ... Proviamo per induzione che $a_n = 2^n - 1$: assumiamo $a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$; allora $a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

Esempio 1.8. Un banca paga ogni anno l'8% di interessi sul denaro depositato. Trovare una relazione di ricorrenza per il gruzzolo di denaro che uno riesce ad accumulare dopo n anni se segue una di queste strategie di investimento:

(a) investe 1 000 euro e li lascia in banca per n anni;

(b) investe 100 euro alla fine di ogni anno.

Soluzione. (a) Si ha $a_n = a_{n-1} + 0.08a_{n-1} = 1.08a_{n-1}$, con la condizione iniziale $a_0 = 1\,000$; pertanto

$$a_n = 1.08a_{n-1} = (1.08)^2 a_{n-2} = ... = (1.08)^n a_0 = (1.08)^n 1\,000.$$

(b) Si ha $a_n = 1.08a_{n-1} + 100$ con condizione iniziale $a_0 = 0$. Si verifichi che la soluzione è

$$a_n = \frac{100}{0.08}[(1.08)^n - 1].$$

Esempio 1.9. Trovare una relazione di ricorrenza per a_n, numero di n-sequenze composte da $0, 1, 2$ che non contengano la sottosequenza $(0, 1, 2)$.

Soluzione. Cominciamo con un'analisi simile a quella utilizzata per il problema del bambino che sale le scale Esempio 1.5: se la prima cifra è 1 o 2, le rimanenti cifre formano una qualunque $(n-1)$-sequenza di $0, 1, 2$ che non contiene la sottosequenza $(0, 1, 2)$: in ciascuno dei due casi vi sono pertanto a_{n-1} n-sequenze che non contengano la sottosequenza $(0, 1, 2)$. Se la prima cifra è 0 invece, le rimanenti cifre formano una $(n-1)$-sequenza di $0, 1, 2$ che non contiene la sottosequenza $(0, 1, 2)$ e che non inizia con la sottosequenza$(1, 2)$: essendo quest'ultime pari ad a_{n-3}, abbiamo $a_{n-1} - a_{n-3}$ n-sequenze che non contengano la sottosequenza $(0, 1, 2)$ e che iniziano con 0. Dunque la relazione è $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-3}) = 3a_{n-1} - a_{n-3}$.

1.1.1 Esercizi

Esercizio 1.1. Si trovi una relazione di ricorrenza per il numero di possibili distribuzioni di n oggetti distinti in 5 ripiani di una armadio. Qual è la condizione iniziale?

Esercizio 1.2. Si trovi una relazione di ricorrenza per il numero di sequenze di macchine di tipo Cadillac, Continental, Ford in una fila di n posti macchina, tenendo presente che una Cadillac o una Continental necessitano di due posti macchina per il parcheggio, mentre una Ford ne richiede uno solo.

Esercizio 1.3. Supponiamo che ogni coppia di lepri generi ogni mese una nuova coppia (un maschio ed una femmina) di lepri. Trovare la relazione di ricorrenza che descrive il numero di coppie di lepri mese dopo mese. Se inizialmente c'è una sola coppia di lepri appena nate, qual è il numero di coppie di lepri dopo 5 mesi.

Esercizio 1.4. (a) Si trovi una relazione di ricorrenza per il numero di regioni create da n rette nel piano se k di queste rette sono parallele e le altre $n-k$ intersecano tutte le altre con la condizione che tre rette non passino per uno stesso punto;

(b) se $n = 9, k = 3$ si trovi il numero di regioni.

Esercizio 1.5. Si trovi una relazione di ricorrenza per l'ammontare del denaro depositato in un conto bancario dopo n anni se l'interesse è del 6% ed ogni anno sono aggiunti al conto 50 euro.

Esercizio 1.6. Si trovi una relazione di ricorrenza per contare il numero di sequenze di n cifre dove compaiano solo $0, 1$ con almeno un caso di cifre 0 consecutive.

1.2 Relazioni di ricorrenza lineari

Studieremo ora una classe ristretta di relazioni di ricorrenza per le quali potremo dare semplici tecniche di risoluzione.

Definizione 1.10. Una relazione di ricorrenza *lineare di ordine* r è una relazione del tipo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

dove c_1, ..., c_r sono costanti e f è una funzione di n.

1.2.1 Relazioni lineari omogenee

Definizione 1.11. Una relazione di ricorrenza *lineare omogenea di ordine* r è una relazione del tipo

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} \qquad (R_o)$$

dove c_1, ..., c_r sono costanti.

Chiaramente ogni relazione di ricorrenza lineare omogenea ha la successione identicamente nulla come soluzione. Analogamente a quanto capita per le equazioni lineari omogenee, si verifica facilmente che combinazioni lineari di soluzioni di una relazione omogenea sono ancora soluzioni.

Proposizione 1.12. *Siano $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ due soluzioni della relazione lineare omogenea R_o, e A, B due numeri complessi. Allora la successione $(Au_n + Bv_n)_n$ è anch'essa una soluzione di R_o.*

Dimostrazione. Essendo $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ soluzioni di R_o, si hanno le seguenti uguaglianze

$$u_n = c_1 u_{n-1} + \cdots + c_r u_{n-r} \quad \text{e} \quad v_n = c_1 v_{n-1} + \cdots + c_r v_{n-r}.$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per A, la seconda per B e sommando membro a membro otteniamo

$$Au_n + Bv_n = c_1(Au_{n-1} + Bv_{n-1}) + dots + c_r(Au_{n-r} + Bv_{n-r}),$$

ovvero che la successione $(Au_n + Bv_n)_n$ risolve la relazione R_o. □

Definizione 1.13. Diciamo *polinomio caratteristico* della relazione di ricorrenza lineare omogenea R_o di ordine r il polinomio $x^r - c_1 x^{r-1} - \cdots - c_r$.

Esempio 1.14. Il polinomio caratteristico di $a_n = 2a_{n-1} + ia_{n-3}$ è $x^3 - 2x^2 - i$.

Le radici del polinomio caratteristico (eventualmente complesse) ci permetteranno di determinare tutte le soluzioni di una relazione lineare omogenea. Ricordiamo che ogni polinomio di grado r ha esattamente r radici, se contate con la loro molteplicità.

Proposizione 1.15. *Sia λ una radice del polinomio caratteristico di una relazione lineare omogenea. Allora la successione $(\lambda^n)_n$ è una soluzione della relazione.*

Dimostrazione. Si consideri la relazione omogenea $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r}$. Se λ è una radice del polinomio caratteristico, si ha $\lambda^r - c_1\lambda^{r-1} - \cdots - c_r = 0$. Moltiplicando per λ^{n-r} si ottiene $\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - ... - c_r\lambda^{n-r} = 0$, e quindi la successione $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una soluzione della nostra relazione. $\square$

Vale, in generale, il seguente teorema del quale omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.16. *Si consideri una relazione di ricorrenza lineare omogenea di ordine r.*

(a) *Supponiamo che la radice λ del polinomio caratteristico abbia molteplicità μ. Allora*

$$\lambda^n, \lambda^n n, ..., \lambda^n n^{\mu-1}$$

sono soluzioni della relazione di ricorrenza. Al variare di λ tra le radici del polinomio caratteristico si ottengono r soluzioni di questo tipo, dette le soluzioni-base *della relazione.*

(b) *La soluzione generale della relazione è data da tutte le combinazioni lineari (a coefficienti complessi) delle r soluzioni-base della relazione.*

Esempio 1.17. Se il polinomio caratteristico di una relazione di ricorrenza omogenea ha radici distinte λ_1, ..., λ_r, allora la soluzione generale della relazione è

$$A_1\lambda_1^n + ... + A_r\lambda_r^n$$

con A_1, ..., A_r costanti complesse.

La relazione di ricorrenza omogenea del secondo ordine $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ ha polinomio caratteristico $x^2 + 5x - 6$ che ha come radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$; quindi la soluzione generale della relazione è $a_n = A2^n + B3^n$, al variare di A e B.

Data una relazione omogenea di ordine r, le r costanti arbitrarie che compaiono nella soluzione generale sono determinate univocamente, una volta assegnate r condizioni iniziali consecutive.

Esempio 1.18. Risolvere $a_n - 9a_{n-2} = 0$ con

(a) $a_0 = 6, a_1 = 12$;

(b) $a_3 = 324, a_4 = 486$;

(c) $a_0 = 6, a_2 = 54$;

(d) $a_0 = 6, a_2 = 10$;

Soluzione. Il polinomio caratteristico $x^2 - 9$ ha radici 3 e -3: la soluzione generale è data da $A3^n + B(-3)^n$, con A, B costanti arbitrarie. Le condizioni iniziali ci permetteranno di determinare le costanti A e B.

(a) Da $a_0 = 6$ e $a_1 = 12$ si ricava il sistema lineare $\begin{cases} A + B & = 6 \\ 3A - 3B & = 12 \end{cases}$. Risolvendolo si ricava $A = 5, B = 1$. La soluzione pertanto è

$$a_n = 5(3^n) + (-3)^n.$$

(b) Da $a_3 = 324$ e $a_4 = 486$ si ricava il sistema lineare $\begin{cases} 27A - 27B & = 324 \\ 81A + 81B & = 486 \end{cases}$. Risolvendolo si ricava $A = 9, B = -3$. La soluzione pertanto è

$$a_n = 9(3^n) - 3(-3)^n.$$

(c) Questa volta le due condizioni iniziali non sono consecutive: da $a_0 = 6$ allora $A + B = 6$, e $a_2 = 54$ si ricava il sistema lineare $\begin{cases} A + B & = 6 \\ 9A + 9B & = 54 \end{cases}$, equivalente alla singola equazione $A + B = 6$. In tal caso la soluzione non è unica: ogni successione del tipo $a_n = A3^n + (6 - A)(-3)^n$ rispetta le condizioni iniziali.

(d) Le due condizioni iniziali non consecutive implicano $A+B = 6$ e $9A+9B = 10$, sistema lineare che non ha soluzione.

Esempio 1.19. Risolvere la relazione di ricorrenza di Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con condizioni iniziali $a_0 = 1, a_1 = 1$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $x^2 - x - 1$ che ha radici $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$: la soluzione generale è $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, con A, $B \in \mathbb{C}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $A = (5 + \sqrt{5})/10$ e $B = (5 - \sqrt{5})/10$; sostituendo questi valori nell'espressione della soluzione generale otteniamo l'unica soluzione

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Esempio 1.20. Determinare la soluzione generale della relazione di ricorrenza

$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}.$$

Risolvere poi la medesima relazione con condizioni iniziali $a_0 = 4$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 15$.

Soluzione Il polinomio caratteristico della relazione è

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x - 2)^2(x + 1).$$

Le soluzioni-base della relazione sono 2^n, $n2^n$ e $(-1)^n$: la soluzione generale è pertanto

$$A2^n + Bn2^n + C(-1)^n,$$

con A, B e C costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni iniziali si trova $A = 1$, $B = 1$ e $C = 3$.

Esempio 1.21. Indichiamo con x_n il numero di sottoinsiemi di un insieme X_n con n elementi. Mostrare che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la relazione di ricorrenza $a_n = 2a_{n-1}$. Risolvere la relazione e determinare i valori della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soluzione. Sia $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. I sottoinsiemi di X_n possono essere suddivisi in due classi: quella formata dai sottoinsiemi che contengono n, e quella formata dai sottoinsiemi che non contengono n. Ogni sottoinsieme della prima classe è ottenuto aggiungendo ad un opportuno sottoinsieme di $X_{n-1} = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ il numero n: ve ne sono pertanto x_{n-1}. I sottoinsiemi appartenenti alla seconda classe sono esattamente i sottoinsiemi di X_{n-1}. Pertanto $x_n = 2x_{n-1}$. Il polinomio caratteristico è $x - 2$; la soluzione generale della relazione è $a_n = A2^n$. I sottoinsiemi di $X_1 = \{1\}$ sono l'insieme vuoto ed X_1 stesso, pertanto $x_1 = 2$. Quindi $A = 1$ e $x_n = 2^n$.

Esempio 1.22. Trovare la soluzione della relazione di ricorrenza $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}$ con condizioni iniziali $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 13$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ ha radici $2, -2, 3$: la soluzione generale è $a_n = A2^n + B(-2)^n + C3^n$. Le condizioni iniziali impongono

$$\begin{cases} A + B + C & = & 2 \\ 2A - 2B + 3C & = & 5 \\ 4A + 4B + 9C & = & 13 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema lineare si ottiene $A = 1, B = 0, C = 1$: la soluzione cercata è pertanto $a_n = 2^n + 3^n$.

Esempio 1.23. Trovare la soluzione generale della relazione di ricorrenza il cui polinomio caratteristico abbia radici $2, 2, 2, -3, 4, 4$.

Soluzione. Le soluzioni-base sono 2^n, $2^n n$, $2^n n^2$, $(-3)^n$, 4^n, $4^n n$: la soluzione generale è pertanto

$$a_n = A_1 2^n + A_2 2^n n + A_3 2^n n^2 + A_4(-3)^n + A_5 4^n + A_6 4^n n$$

con A_1, ..., A_6 costanti arbitrarie.

1.2.2 Esercizi

Esercizio 1.7. Se 500 euro vengono investiti in un fondo che dà l'8% di interessi all'anno, trovare una formula per calcolare la quantità di denaro accumulato dopo n anni.

Esercizio 1.8. Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza:

(a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ con condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1$;

(b) $a_n = a_{n-2}$ con condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1$;

(c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ con condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 2$;

(d) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ con condizioni iniziali $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2$.

Esercizio 1.9. Trovare e risolvere una relazione di ricorrenza che calcoli i possibili modi per riempire un una fila di n posti di un parcheggio utilizzando macchine blu e rosse e camion, tenendo conto che i camion occupano due spazi, le macchine ne occupano uno.

Esercizio 1.10. Una multinazionale farmaceutica decide di raddoppiare ogni anno l'aumento di prezzo del suo prodotto di punta. Trovare e risolvere la relazione di ricorrenza per il prezzo p_n del prodotto nell'anno n, supponendo che $p_0 = 1, p_1 = 4$.

Esercizio 1.11. La relazione di ricorrenza $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ ha soluzione generale $a_n = A_1 3^n + A_2 6^n$: determinare c_1, c_2.

1.2.3 Relazioni lineari non omogenee

Analizziamo ora una generica relazione lineare di ordine r

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

dove c_1, ..., c_r sono delle costanti ed f è una funzione di n. Chiameremo ancora polinomio caratteristico della relazione il polinomio caratteristico della relazione omogenea associata.

Proposizione 1.24. *La soluzione generale di una relazione di ricorrenza lineare si ottiene aggiungendo una soluzione particolare alla soluzione generale della sua parte omogenea.*

Dimostrazione. Sia $(v_n)_n$ una soluzione della relazione. È chiaro che se $(u_n)_n$ è soluzione della parte omogenea, allora $(u_n + v_n)_n$ è anch'essa una soluzione della relazione. Viceversa, sia $(w_n)_n$ un'altra soluzione della relazione; allora

$$w_n - v_n = c_1(w_{n-1} - v_{n-1}) + ... + c_r(w_{n-r} - v_{n-r}) + (f(n) - f(n)),$$

e pertanto la successione $(u_n)_n$ definita da $u_n = w_n - v_n$ è soluzione della parte omogenea della relazione e si ha $w_n = u_n + v_n$. □

Esempio 1.25. Come abbiamo visto nell'Esempio 1.7, il minimo numero di passi a_n per terminare il gioco della torre di Hanoi con n anelli soddisfa la relazione

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \qquad a_1 = 1.$$

Si vede facilmente che la successione costante uguale a -1 è una soluzione della relazione. La soluzione-base della parte omogenea è 2^n. Pertanto la soluzione generale della relazione è $a_n = A2^n - 1$. Imponendo ora la condizione iniziale $a_1 = 1$ otteniamo $A = 1$. La soluzione cercata pertanto è

$$a_n = 2^n - 1.$$

Diversamente dal caso omogeneo, non vi è un metodo generale per ottenere una soluzione particolare di una relazione non omogenea. Vediamo, senza dimostrazione, come procedere nei casi in cui il termine non omogeneo sia particolarmente semplice.

Proposizione 1.26. *Si consideri una relazione di ricorrenza lineare con parte non omogenea f.*

1. *Sia $f(n) = cq^n$ con c costante e $q \neq 0$. Se q non è una radice del polinomio caratteristico, allora vi è una soluzione particolare* del tipo $a_n = \alpha q^n$. *Se q è una radice del polinomio caratteristico di molteplicità μ, vi è una soluzione particolare* del tipo $a_n = \alpha n^\mu q^n$. *La costante α si determina imponendo che la successione $(a_n)_n$ verifichi la relazione.*

2. *Sia $f(n)$ un polinomio in n di grado k. Se 1 non è una radice del polinomio caratteristico, una soluzione particolare è un polinomio di grado k* del tipo $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_k n^k$. *Se 1 è una radice del polinomio caratteristico di molteplicità μ, una soluzione particolare è* del tipo $a_n = n^\mu(\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_k n^k)$. *Le costanti α_0, ..., α_k si determinano imponendo che la successione $(a_n)_n$ verifichi la relazione.*

Corollario 1.27. *Una relazione di ricorrenza lineare il cui termine non omogeneo è costante ammette*

- *una soluzione costante se 1 non è radice del polinomio caratteristico,*
- *una soluzione del tipo αn^μ se 1 è radice di molteplicità μ del polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Segue da entrambi i casi della precedente proposizione, rispettivamente con $q = 1$ e $k = 0$. □

Esempio 1.28. Determinare una soluzione particolare delle relazioni

(i) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 5(3^n)$;

(ii) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 7(2^n)$;

(iii) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 1 + 3n$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico di tutte e tre le relazioni è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.

(i) Dato che 3 non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\alpha 3^n$. Sostituendo nella relazione si ha

$$\alpha 3^n = 4\alpha 3^{n-1} - 4\alpha 3^{n-2} + 5(3^n);$$

dividendo per 3^n si ha

$$\alpha = 4\frac{\alpha}{3} - 4\frac{\alpha}{9} + 5,$$

da cui $\alpha = 45$. Una soluzione particolare è pertanto $a_n = 45(3^n)$.

(ii) Dato che 2 è radice di molteplicità due del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $a_n = \alpha n^2 2^n$. Sostituendo nella relazione si ha

$$\alpha n^2 2^n = 4\alpha(n-1)^2 2^{n-1} - 4\alpha(n-2)^2 2^{n-2} + 7(2^n);$$

dividendo per 2^n si ha

$$\alpha n^2 = 2\alpha(n-1)^2 - \alpha(n-2)^2 + 7,$$

da cui $\alpha = 7/2$. Una soluzione particolare è pertanto $a_n = \dfrac{7}{2}n^2 2^n$.

(iii) Dato che 1 non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\alpha_0 + \alpha_1 n$. Sostituendo nella relazione si ha

$$\alpha_0 + \alpha_1 n = 4(\alpha_0 + \alpha_1(n-1)) - 4(\alpha_0 + \alpha_1(n-2)) + 1 + 3n =$$
$$1 + 4\alpha_1 + 3n,$$

da cui $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_0 = 1 + 4\alpha_1 = 13$. Una soluzione particolare è pertanto $a_n = 13 + 3n$.

Ricapitoliamo il metodo per risolvere una relazione di ricorrenza lineare.

Algoritmo di risoluzione Per determinare la soluzione di una relazione lineare di ordine r si procede come segue:

Passo 1 Si determina la soluzione generale $(u_n)_n$ della relazione omogenea associata; questa dipende da r costanti arbitrarie.

Passo 2 Si determina una soluzione particolare $(v_n)_n$ della relazione di partenza.

Passo 3 La soluzione generale della relazione è data dalla somma della soluzione generale $(u_n)_n$ e della soluzione particolare $(v_n)_n$.

A questo punto, se sono stati assegnate delle condizioni iniziali consecutive, si completa la procedura con:

Passo 4 Si ricava il valore delle r costanti arbitrarie presenti nella soluzione generale $(u_n)_n$ imponendo che la successione $(u_n + v_n)_n$ soddisfi le r condizioni iniziali.

Esempio 1.29. Si consideri la relazione di ricorrenza

$$a_n = 1.08a_{n-1} + 100, \qquad a_0 = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $x - 1.08$; pertanto la soluzione generale della parte omogenea è $A(1.08)^n$. Dato che la parte non omogenea $f(n) = 100$ è una costante che non è radice del polinomio caratteristico, la relazione ha una soluzione costante del tipo $v_n = \alpha$. Per determinare α, lo sostituiamo nella relazione, ottenendo

$$\alpha = 1.08\alpha + 100$$

da cui $\alpha = -100/0.08$. La soluzione generale della relazione è

$$a_n = A(1.08)^n - \frac{100}{0.08}.$$

Imponendo la condizione iniziale $a_0 = 0$ si trova $A = 100/0.08$.

Nell'esempio che segue esibiamo una relazione lineare a coefficienti reali con soluzioni reali per risolvere la quale è necessario utilizzare i numeri complessi.

Esempio 1.30. Determiniamo la soluzione della relazione

$$a_n = -a_{n-2} + 1, \quad a_0 = 0,\, a_1 = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $x^2 - 1$ che ha come radici i e $-i$: la soluzione generale della parte omogenea è $Ai^n + B(-i)^n$ con A e B costanti arbitrarie. Una soluzione particolare della relazione $a_n = -a_{n-2} + 1$ è una costante α: sostituendo nella relazione si trova $\alpha = -\alpha + 1$ da cui $\alpha = 1/2$. La soluzione generale delle relazione $a_n = -a_{n-2} + 1$ è pertanto $a_n = Ai^n + B(-i)^n + 1/2$, con A e B costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni iniziali $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ si ha

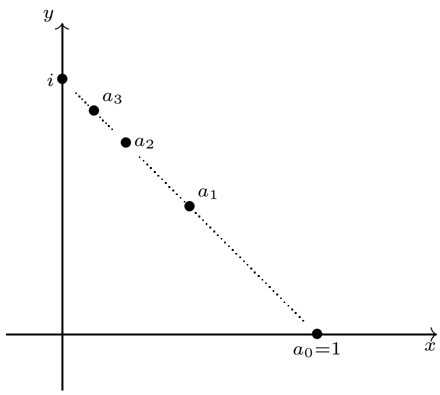
$$\begin{cases} A + B + 1/2 & = 0 \\ Ai - Bi + 1/2 & = 0 \end{cases}$$

Pertanto $a_n = \frac{-1+i}{4} i^n - \frac{1+i}{4}(-i)^n + \frac{1}{2}$. Si osservi che se $n = 2k$ è pari si ha $a_n = (1 - (-1)^k)/2$, mentra se $n = 2k+1$ è dispari si ha $a_n = (1 + (-1)^{k+1})/2$.

Esempio 1.31. Risolvere la relazione di ricorrenza $a_n = \dfrac{a_{n-1}+i}{2}$ con $a_0 = 1$. Interpretare geometricamente sul piano complesso la soluzione trovata.

Soluzione Il polinomio caratteristico della relazione è $\lambda - 1/2$; quindi la soluzione generale della parte omogenea della relazione è $A(1/2^n)$ al variare di $A \in \mathbb{C}$. Dato che il termine non omogeneo è una costante diversa da 1 la relazione ha una soluzione costante α. Per determinare il valore di α, imponiamo che $a_n = \alpha$ sia una soluzione: $\alpha = \dfrac{\alpha+i}{2}$, quindi $\alpha = i$. La soluzione generale della relazione è dunque $a_n = A(1/2^n) + i$. Imponendo la condizione iniziale $a_0 = 1$ si ottiene $A = 1 - i$, e quindi la soluzione cercata è $a_n = \dfrac{1-i}{2^n} + i$.

La relazione $a_n = \dfrac{a_{n-1}+i}{2}$ indica che a_n è il punto di mezzo tra i e a_{n-1}:



Esempio 1.32. Trovare la soluzione generale di $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6(4^n)$.

Soluzione. Il polinomio caratteristico della relazione è $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. La soluzione generale della parte omogenea è quindi $u_n = A2^n + B3^n$ con A, B costanti arbitrarie. Dato che 4 non è radice del polinomio caratteristico, la relazione ha una soluzione del tipo $v_n = \alpha 4^n$; sostituendo nella relazione si trova $\alpha 4^n = 5\alpha 4^{n-1} - 6\alpha 4^{n-2} + 6(4^n)$ da cui $\alpha = 48$. Quindi la soluzione generale è $a_n = A2^n + B3^n + 48(4^n)$.

Esempio 1.33. Si calcoli la somma dei quadrati dei primi n interi positivi.

Soluzione. Posto $x_n = 0^2 + ... + n^2$, si ha $x_n = x_{n-1} + n^2$ con $x_0 = 0$. Il polinomio caratteristico di tale relazione è $x - 1$. La soluzione della parte omogenea è quindi $u_n = A$, dove A è una costante arbitraria; una soluzione particolare della relazione è un polinomio del tipo $v_n = n(\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2)$. Per determinare α_0, α_1 e α_2 imponiamo che v_n risolva la relazione:

$$n(\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2) = (n-1)(\alpha_0 + \alpha_1(n-1) + \alpha_2(n-1)^2) + n^2.$$

Uguagliando i coefficienti di n, n^2, n^3 e il termine noto otteniamo: $\alpha_0 = 1/6$, $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/3$. Quindi la soluzione generale è $a_n = A + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$. La condizione iniziale $a_0 = 0$ implica $A = 0$; pertanto $x_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$.

Osservazione 1.34. Se il termine non omogeneo $f(n)$ di una relazione lineare è uguale a $f_1(n) + f_2(n)$, è possibile determinare una soluzione particolare sommando le soluzioni particolari $(v_n)_n$ e $(w_n)_n$ di due relazioni di ricorrenza lineari aventi la stessa parte omogenea e, rispettivamente, parti non omogenee $f_1(n)$ e $f_2(n)$.

Esempio 1.35. Determinare la soluzione generale della relazione di ricorrenza

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^n + n.$$

Soluzione. Il polinomo caratteristico è $x - 2$: pertanto la soluzione generale della parte omogenea è $A2^n$ con A costante arbitraria. Determiniamo separatamente una soluzione particolare delle relazioni $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ e $a_n = 2a_{n-1} + n$. Dato che 2 è radice del polinomio caratteristico, la prima delle due relazioni ha una soluzione del tipo $v_n = \alpha n 2^n$; inserendo nella relazione si trova $\alpha n 2^n = \alpha(n-1)2^n + 2^n$, e quindi $\alpha n = \alpha(n-1) + 1$, da cui $\alpha = 1$ e quindi $v_n = n2^n$. Passando alla seconda relazione, dato che 1 non è radice del polinomio caratteristico, essa ha una soluzione del tipo $w_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$; inserendo nella relazione si trova $\alpha_0 + \alpha_1 n = 2(\alpha_0 + \alpha_1(n-1)) + n$, ovvero

$$\alpha_0 + \alpha_1 n = 2\alpha_0 - 2\alpha_1 + (2\alpha_1 + 1)n,$$

da cui, uguagliando i coefficienti, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = -2$ e quindi $w_n = -2 - n$. La soluzione generale della nostra equazione pertanto è $a_n = A2^n + n2^n - 2 - n$ con A costante arbitraria.

1.2.4 Esercizi

Esercizio 1.12. Sia f una funzione definita su $\mathbb{N}$ e c una costante. Determinare, procedendo a ritroso, la soluzione di $a_n = ca_{n-1} + f(n)$ con $a_0 = 1$.

Esercizio 1.13. Si risolvano le seguenti relazioni di ricorrenza:

(*a*) $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$, $a_0 = 1$;

(*b*) $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$, $a_0 = 3$;

(*c*) $a_n = a_{n-1} + 3n^2$, $a_0 = 10$.

Esercizio 1.14. (*a*) Si trovi e si risolva una relazione di ricorrenza per il numero di sottoscacchiere quadrate di misura qualsiasi che possono essere disegnate su una scacchiera $n \times n$.

(*b*) Si ripeta la parte (*a*) per sottoscacchiere rettangoli di qualunque tipo.

Esercizio 1.15. Se il polinomio caratteristico di una certa relazione di ricorrenza è $(x-1)^2(x-2)(x-3)^2$, si determini la soluzione generale della sua parte omogenea. Si determini di che tipo può essere una soluzione particolare delle relazione quando la sua parte non omogenea f è definita da:

(*a*) $f(n) = 4n^3 + 5n$;

(*b*) $f(n) = 4^n$;

(*c*) $f(n) = 3^n$.

Esercizio 1.16. Risolvere le seguenti relazioni di ricorrenza:

(*a*) $a_n = 3a_{n-1} - 2$, $a_0 = 0$;

(*b*) $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$;

(*c*) $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$;

(*d*) $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$, $a_0 = 3$.

Esercizio 1.17. Si risolva la relazione di ricorrenza $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$, $a_0 = a_1 = 1$.

Esercizio 1.18. Trovare e risolvere una relazione di ricorrenza per il guadagno di un'azienda, se il tasso di crescita del guadagno nell'anno k-esimo rispetto all'anno precedente è di $10(2^k)$ euro, con $a_0 = 20$ e $a_1 = 1020$.

Esercizio 1.19. Si determini una soluzione particolare della relazione $a_n = ca_{n-1} + f(n)$ con

(*a*) $f(n) = 1$;

(*b*) $f(n) = n$;

(*c*) $f(n) = n^2$;

(*d*) $f(n) = q^n$.

Esercizio 1.20. Si trovi la soluzione generale per $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2 + 3n$.

Esercizio 1.21. Si risolvano le seguenti relazioni di ricorrenza con $a_0 = 1$:

(*a*) $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ (suggerimento: porre $b_n = a_n^2$);

(*b*) $a_n = -na_{n-1} + n!$ (suggerimento: definire un opportuno b_n come nella parte (*a*)).

Esercizio 1.22. Determinare la soluzione generale della relazione $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n$.

Esercizio 1.23. Si risolva $a_n = a_{n-1} + 12n^2$, con $a_0 = 5$.

Esercizio 1.24. Determinare la soluzione generale della relazione $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3(2^n)$. Risolvere poi la relazione con dato iniziale $a_1 = 8$.

1.3 Relazioni Dividi e Conquista

In questa sezione presentiamo una classe particolare di relazioni di ricorrenza che appaiono frequentemente nell'analisi di algoritmi ricorsivi, in particolare nel settore informatico. Si tratta di relazioni che mirano a calcolare il numero di passi di un algoritmo costruito con un approccio noto con il nome "dividi e conquista". Tale approccio consiste nello spezzare un problema di "taglia" n in due (o $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$) problemi di "taglia" $n/2$ (o n/b).

Esempio 1.36. Si voglia calcolare il numero di operazioni necessarie per determinare il minimo e il massimo di un insieme S di $n = 2^k$ interi distinti. Se $n = 2$ è sufficiente un solo confronto per risolvere il problema. Se $n \geq 4$, supponiamo di aver trovato il minimo m_1 e il massimo M_1 della prima metà di S (formata da i primi $n/2$ numeri) e il minimo m_2 e il massimo M_2 della seconda metà di S (formata dagli ultimi $n/2$ numeri). È sufficiente a questo punto effettuare 2 confronti: il minimo di S sarà il più piccolo tra m_1 e m_2, il massimo di S il maggiore tra M_1 e M_2.

Indicando con a_n il numero di confronti necessario per risolvere il problema con il metodo descritto sopra con $|S| = n = 2^k$, vale la seguente relazione lineare:

$$a_n = 2a_{n/2} + 2, \qquad n \geq 4 \quad \text{con } a_2 = 1.$$

Si tratta di una relazione priva di ordine. Determiniamo a_n con $n = 2^k$. Posto $x_k = a_{2^k}$, la relazione precedente equivale a

$$x_k = 2x_{k-1} + 2, \quad k \geq 2, \quad x_1 = 1.$$

Usando la teoria generale si trova $x_k = (3/2)2^k - 2$. Pertanto, posto $n = 2^k$ abbiamo $a_n = (3/2)n - 2$.

Esempio 1.37. Generalmente si effettuano n^2 moltiplicazioni di numeri con una cifra per effettuare il prodotto di due numeri con n cifre. Utilizziamo l'approccio dividi e conquista per sviluppare un algoritmo alternativo. Supponiamo come sopra che n sia una potenza di 2. Scriviamo i due numeri di n cifre $x = x_1|x_2$ e $y = y_1|y_2$ dove x_i e y_i sono sequenze di $n/2$ cifre ciascuna: ovviamente si ha

$$x = x_1 10^{n/2} + x_2 \qquad y = y_1 10^{n/2} + y_2.$$

Di conseguenza

$$xy = (x_1y_1)10^n + (x_1y_2 + x_2y_1)10^{n/2} + x_2y_2.$$

Osserviamo poi che

$$x_1y_2 + x_2y_1 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1y_1 - x_2y_2$$

e quindi è sufficiente effettuare solo 3 prodotti di numeri con $n/2$ cifre, $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$, x_1y_1 e x_2y_2 per determinare xy (in realtà x_1+x_2 e y_1+y_2 potrebbero avere $(n/2+1)$ cifre, ma questa piccola differenza non altera l'ordine di grandezza della soluzione). Se a_n indica il numero di prodotti di singole cifre necessari per moltiplicare due numeri di n cifre con la procedura sopra descritta, si ha la relazione di ricorrenza

$$a_n = 3a_{n/2}, \qquad n = 2^k, k \geq 0$$

con condizione iniziale $a_1 = 1$. Posto $n = 2^k$, ovvero $k = \log_2 n$, e $x_k = a_{2^k}$ la relazione trovata equivale a

$$x_k = 3x_{k-1} \qquad x_0 = a_1 = 1.$$

Si tratta di una relazione omogenea che, come abbiamo visto, ha come soluzione generale $x_k = A3^k$, con A costante arbitraria; la condizione iniziale porge poi $A = 1$. Tenendo conto che $k = \log_2 n$ si ha pertanto $a_n = 3^{\log_2 n} = n^{\log_2 3}$. Si osservi che $\log_2 3 \leq 1.6$; quindi $a_n \leq n^{1.6}$: l'algoritmo descritto per il prodotto di numeri necessita quindi meno degli n^2 passi del metodo tradizionale.

Formalizziamo in generale quanto visto nell'esempio precedente.

Definizione 1.38. Una relazione di ricorrenza *dividi e conquista* lineare è una relazione del tipo $a_n = c_1a_{n/b} + c_2a_{n/b^2} + ... + c_pa_{n/b^p} + f(n)$ dove b e p sono due interi, n è un multiplo di b^p ed f è una funzione.

Osservazione 1.39. Le relazioni di ricorrenza dividi e conquista non hanno ordine, infatti $n - n/b^p$ tende a infinito per $n \to +\infty$. Inoltre, la relazione dice che per determinare a_n devo conoscere i valori di $a_{n/b}$, a_{n/b^2}, ..., a_{n/b^p}. Pertanto se il primo termine noto è a_{n_0}, una volta assegnati i valori di a_{bn_0}, ..., $a_{b^{p-1}n_0}$, la relazione permette di ottenere in modo unico i valori di $a_{b^kn_0}$ con $k \geq p$.

Metodo di risoluzione della relazione $a_n = c_1a_{n/b} + ... + c_pa_{n/b^p} + f(n)$. Posto $n = b^kn_0$, con n_0 fissato, e posto $x_k = a_{b^kn_0}$, la relazione precedente diventa la relazione lineare di ordine p

$$x_k = c_1x_{k-1} + ... + c_px_{k-p} + f(b^kn_0).$$

Con le tecniche usuali se ne determina la soluzione generale. Per esprimere la soluzione generale trovata in funzione di n, è sufficiente utilizzare l'uguaglianza $n = b^kn_0$ per ricavare $k = \log_b(n/n_0)$ da sostituire nella formula risolutiva. Tale formula che dipenderà da p costanti arbitrarie si chiamerà *soluzione generale* della relazione di partenza. Al solito, fissate p condizioni iniziali consecutive $x_0 = a_{n_0}$, $x_1 = a_{bn_0}$, ..., $x_{p-1} = a_{b^{p-1}n_0}$, si determinano i valori delle p costanti arbitrarie. Si osservi che l'indice n_0 fissato all'inizio è l'indice del primo termine noto.

Esempio 1.40. Si consideri la relazione $a_n = 5a_{n/2} - 6a_{n/4} + n$. Determinarne la soluzione generale e risolvere la relazione con

(a) dati iniziali $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$;

(b) dati iniziali $a_3 = 2$ e $a_6 = 1$.

Soluzione. Posto $n = 2^kn_0$, con n_0 fissato, e posto $x_k = a_{2^kn_0}$, la relazione precedente diventa la relazione lineare di ordine 2

$$x_k = 5x_{k-1} - 6x_{k-2} + 2^k.$$

Il polinomio caratteristico è $x^2 - 5x + 6$ che ha 2, 3 come radici. La soluzione generale della relazione omogenea è $x_k = A2^k + B3^k$ con A e B costanti arbitrarie. Dato che 2 è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione particolare della relazione del tipo $x_k = \alpha k2^k$. Da $x_k = 5x_{k-1} - 6x_{k-2} + 2^k$ si deduce $2\alpha k = 5\alpha(k-1) - 3\alpha(k-2) + 2$, da cui $\alpha = -2$. La soluzione generale è $x_k = A2^k + B3^k - 2^{k+1}$ con A e B costanti arbitrarie. Per determinare la soluzione generale della relazione di partenza ricordiamo che $n = 2^kn_0$ e quindi $a_n = x_{\log_2(n/n_0)}$:

$$a_n = A2^{\log_2(n/n_0)} + B3^{\log_2(n/n_0)} - 2^{\log_2(n/n_0)+1},$$

da cui

$$a_n = A(n/n_0) + B(n/n_0)^{\log_2 3} - 2(n/n_0).$$

(a) Dai dati iniziali si ricava $n_0 = 1$, $2 = a_1 = A + B - 2$ e $1 = a_2 = 2A + 3B - 4$. Quindi $A = 7$ e $B = -3$ e pertanto la soluzione è $a_n = 5n - 3n^{\log_2 3}$.

(b) Dai dati iniziali si ricava $n_0 = 3$, $2 = a_3 = A + B - 2$ e $1 = a_6 = 2A + 3B - 4$. Quindi $A = 7$ e $B = -3$ e pertanto la soluzione è $a_n = 5(n/3) - 3(n/3)^{\log_2 3}$.

Esempio 1.41. Risolvere la relazione

$$a_n = ca_{n/b} + d, \quad n = b^k, \quad c > 0, \quad b \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

con dato iniziale a_1 fissato.

Soluzione. Non viene qui chiesto di determinare la soluzione generale della relazione. Pertanto dal dato iniziale ricaviamo subito $n_0 = 1$. Posto dunque $n = b^k$ e posto $x_k = a_{b^k}$, la relazione precedente diventa la relazione lineare $x_k = cx_{k-1} + d$ di ordine 1 con dato iniziale $x_0 = a_1$. Il polinomio caratteristico della relazione omogenea associata è $x - c$ che ha c come radice. Le soluzioni della relazione omogenea sono $x_k = Ac^k$ con A costante arbitraria. Distinguiamo i casi $c = 1$ e $c \neq 1$.

Se $c = 1$, una soluzione particolare della relazione è del tipo $x_k = \alpha k$. Da $x_k = x_{k-1} + d$ si deduce $\alpha k = \alpha(k-1) + d$, da cui $\alpha = d$; in tal caso pertanto la soluzione generale è $x_k = A + dk$ con A costante arbitraria. Imponendo $x_0 = a_1$ si trova $A = a_1$.

Se $c \neq 1$, una soluzione particolare è del tipo $x_k = \alpha$. Da $x_k = cx_{k-1} + d$ si deduce $\alpha = c\alpha + d$, da cui $\alpha = \frac{d}{1-c}$; in tal caso pertanto la soluzione generale è $x_k = Ac^k + \frac{d}{1-c}$ con A costante arbitraria. Imponendo $x_0 = a_1$ si trova $A = a_1 - \frac{d}{1-c}$.

Determiniamo i valori di a_n con $n = b^k$. Essendo $k = \log_b n$, si ha $c^{\log_b n} = (b^{\log_b c})^{\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b c} = n^{\log_b c}$, e quindi

$$a_n = \begin{cases} a_1 + d\log_b n & \text{se } c = 1 \\ (a_1 - \frac{d}{1-c})n^{\log_b c} + \frac{d}{1-c} & \text{se } c \neq 1 \end{cases}$$

Esempio 1.42. Risolvere la relazione

$$a_n = ca_{n/b} + dn, \quad n = b^k, \quad b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad c > 0,$$

con dato iniziale a_1 fissato.

Soluzione. Posto $n = b^k$ e $x_k = a_{b^k}$, la relazione in questione equivale a $x_k = cx_{k-1} + db^k$ con condizione iniziale $x_0 = a_1$. Il polinomio caratteristico della relazione è $x - c$ che ha c come radice. La soluzione generale della relazione omogenea è $x_k = Ac^k$ con A costante arbitraria. Distinguiamo i casi $c = b$ e $c \neq b$.

Se $c = b$ la realazione ha una soluzione particolare del tipo $x_k = \alpha kc^k$. Da $x_k = cx_{k-1} + db^k$ si deduce $\alpha kc^k = c\alpha(k-1)c^{k-1} + dc^k$, da cui $\alpha = d$; in tal caso pertanto la soluzione generale è $x_k = Ac^k + dkc^k$ con A costante arbitraria. Imponendo $x_0 = a_1$ si trova $A = a_1$.

Se $c \neq b$, la relazione ha una soluzione particolare del tipo $x_k = \alpha b^k$. Da $x_k = cx_{k-1} + db^k$ si deduce $\alpha b = c\alpha + db$, da cui $\alpha = \frac{db}{b-c}$; in tal caso pertanto la soluzione generale è $x_k = Ac^k + \frac{db}{b-c}b^k$ con A costante arbitraria. Imponendo $x_0 = a_1$ si trova $A = a_1 - \frac{db}{b-c}$.

Determiniamo i valori di a_n con $n = b^k$. Essendo $k = \log_b n$, si ha $c^{\log_b n} = b^{\log_b c \log_b n} = n^{\log_b c}$, e quindi

$$a_n = \begin{cases} a_1 n + dn\log_b n & \text{se } c = b \\ (a_1 - \frac{db}{b-c})n^{\log_b c} + \frac{db}{b-c}n & \text{se } c \neq b \end{cases}$$

Spesso non si è interessati ad una formula esatta per a_n, ma ad una sua stima. Ricordiamo che $f(n)$ è dello stesso ordine di $g(n)$ per $n \to +\infty$ se esistono $A, B > 0$ tali che $Ag(n) \leq f(n) \leq Bg(n)$ per n sufficientemente grande. Riportiamo, senza dimostrazione, il seguente risultato.

Teorema 1.43. *Sia $a_n = ca_{n/b} + f(n)$ una relazione di ricorrenza con $c > 0$ e $f(n) > 0$.*

(i) Se $f(n)$ è dello stesso ordine di $n^{\log_b c}$, allora anche a_n ha il medesimo ordine;

(ii) Se $f(n) \leq An^q$ definitivamente, dove $p > 0$ e $q < \log_b c$, allora esiste $B > 0$ tale che $a_n \leq Bn^{\log_b c}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Esercizi

Esercizio 1.25. Determinare la soluzione delle seguenti relazioni di ricorrenza:

(a) $a_n = 2a_{n/2} + 5$ con dato iniziale $a_1 = 1$;

(b) $a_n = 2a_{n/4} + n$ con dato iniziale $a_1 = 3$;

(c) $a_n = 2a_{n/2} + 2n$ con dato iniziale $a_1 = 5$;

(d) $a_n = a_{n/3} + 4$ con dato iniziale $a_1 = 7$.

Soluzioni (a) $a_n = 6n - 5$, (b) $a_n = \sqrt{n} + 2n$, (c) $a_n = 5n + 2n \log_2 n$, (d) $a_n = 7 + 4 \log_3 n$.

Esercizio 1.26. Determinare le soluzione delle relazioni

(a) $a_n = a_{n/3} + 2$ con condizione iniziale $a_4 = 5$;

(b) $a_n = 2a_{n/3} + 2$ con condizione iniziale $a_1 = 1$.

(c) $a_n = a_{n/3} + 2n$ con condizione iniziale $a_1 = 5$;

(d) $a_n = 2a_{n/3} + 2n$ con condizione iniziale $a_2 = -1$.

Soluzioni (a) $a_n = 5 + 2\log_3(n/4)$, (b) $a_n = 3n^{\log_3 2} - 2$, (c) $a_n = 2 + 3n$, (d) $a_n = -13(n/2)^{\log_3 2} + 6n$.

Esercizio 1.27. Descrivere un approccio del tipo "dividi e conquista" per determinare il massimo tra gli elementi di un insieme di n numeri. Scrivere una relazione di ricorrenza sul numero di confronti necessari e risolverla.

Esercizio 1.28. Descrivere un approccio del tipo "dividi e conquista" per determinare il primo ed il secondo per grandezza tra gli elementi di un insieme di n numeri distinti. Scrivere una relazione di ricorrenza sul numero di confronti necessari e risolverla.