Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

9 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach, siano Y, Z sottospazi vettoriali di X e sia $V = Y + Z$. Dato $v \in V$ definiamo la funzione

$$\|v\|_V := \inf \{\|y\|_X + \|z\|_X : \ y \in Y, \, z \in Z, \, y + z = v\} .$$

i) Dimostrare che $\|\cdot\|_V$ definisce una norma su V.

ii) Dimostrare che $\|v\|_X \leq \|v\|_V$ per ogni $v \in V$.

iii) Dire se sotto queste ipotesi $(V, \|\cdot\|_V)$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 2. Sia $X = C([0,1])$ munito della norma $\|u\| = \max_{[0,1]} |u(x)|$ e sia $T : X \to X$ l'operatore

$$Tu(x) := \int_0^1 e^{x+t} u(t) \, dt \, .$$

i) Dimostrare che T è un operatore lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T.

iii) Dimostrare che T è un operatore compatto.

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto, compatto e definito positivo, cioè tale che $\langle Tx, x \rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$.

i) Dimostrare che esiste un operatore S autoaggiunto e definito positivo tale che $S^2 = T$ (l'operatore S si dice radice quadrata di T).

ii) Dimostrare che S è un operatore compatto.

Esercizio 4. Per $\alpha \in (0, n)$ sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq 1\}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \int_B \frac{1}{|x - y|^\alpha} \, dy \, .$$

i) Dimostrare che per $\alpha < n$ si ha $f_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii) Dimostrare che per $\alpha < n - 1$ si ha $f_\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1.

i) Chiaramente $\|v\|_V \geq 0$ per ogni $v \in V$. Supponiamo che $\|v\|_V = 0$ per un qualche $v \in V$ allora per definizione di estremo inferiore esistono $y_n \in Y$, $z_n \in Z$ tali che $y_n + z_n = v$ e $\lim_{n\to+\infty} \|y_n\|_X + \|z_n\|_X = 0$. Per disuguaglianza triangolare di $\|\cdot\|_X$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} \|y_n + z_n\|_X = 0$, ossia $\|v\|_X = 0$, da cui $v = 0$.

   Fissati $v \in V$ e $\lambda \neq 0$, per ogni $y \in Y$, $z \in Z$ tali che $y + z = v$ si ha anche che $\lambda y + \lambda z = \lambda v$ con $\lambda y \in Y$, $\lambda z \in Z$, essendo Y, Z sottospazi lineari di X. Ne deriva che $\|\lambda v\|_V \leq \|\lambda y\|_X + \|\lambda z\|_X = |\lambda|(\|y\|_X + \|z\|_X)$. Passando all'estremo inferiore su y, z si ottiene $\|\lambda v\|_V \leq |\lambda|\|v\|_V$. La disuguaglianza opposta si ottiene applicando lo stesso argomento a $v' = v/\lambda$ ed ad ogni coppia y', z' tale che $y' + z' = \lambda v$. Analogamente, la disuguaglianza triangolare si ottiene da quella di $\|\cdot\|_X$.

ii) Fissato $v \in V$, per ogni coppia $(y, z) \in Y \times Z$ tale che $y + z = v$, per disuguaglianza triangolare di $\|\cdot\|_X$ si ha che

$$\|v\|_X \leq \|y\|_X + \|z\|_X.$$

   Passando all'estremo inferiore sulle coppie $(y, z) \in Y \times Z$ come sopra si ottiene la disuguaglianza cercata.

iii) Sotto le ipotesi date $(V, \|\cdot\|_V)$ non è in generale uno spazio di Banach. Un caso semplice per vederlo è considerare uno spazio X infinito dimensionale, V un suo sottospazio non chiuso e $Z = \{0\}$.

Soluzione Esercizio 2.

i) La linearità segue subito dalla linearità dell'integrale. Per mostrare la continuità, osserviamo che $\|Tu\|_X \leq e^2\|u\|_X$.

ii) Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$|Tu(x)| = \langle e^t, u(t)\rangle_{L^2}\, e^x \leq (e-1)\|u\|_X\, e^x \leq e(e-1)\|u\|_X$$

   e la disuguaglianza è un'uguaglianza per $u \equiv 1$. Quindi $\|T\| = e(e-1)$.

iii) Poiché l'operatore T ha rango finito è anche un operatore compatto.

Soluzione Esercizio 3.

i) Per il teorema di decomposizione spettrale, esiste una successione di autovalori λ_n dell'operatore T, con i relativi autospazi E_n ortogonali uno rispetto all'altro. Poiché T è definito positivo si ha $\lambda_n > 0$ per ogni n.

   Se definiamo S in modo che $Sx = \lambda_n^{\frac{1}{2}} x$ per ogni $x \in E_n$, otteniamo subito che S è autoaggiunto, definito positivo e $S^2 x = T$ per ogni $x \in H$.

ii) Possiamo supporre $\dim H = +\infty$, altrimenti non c'è niente da dimostrare. Poiché T è compatto si ha $\lambda_n \to 0$ e quindi anche $\lambda_n^{\frac{1}{2}} \to 0$ per $n \to +\infty$. Questo significa che sia T che S sono limiti di operatori di rango finito e quindi anche S è compatto.

Soluzione Esercizio 4.

i) Passando a coordinate polari, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f_\alpha(x) \leq f_\alpha(0) = n|B| \int_0^1 \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho = \frac{n|B|}{n-\alpha}\,.$$

ii) Dato $\varepsilon > 0$ poniamo

$$f_\varepsilon(x) = \int_B \min\left(\frac{1}{|x-y|^\alpha}, \frac{1}{\varepsilon}\right) dy\,.$$

   Per ottenere $f_\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ è sufficiente mostrare che le funzioni f_ε sono uniformemente lipschitziane.

   Notiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$f_\varepsilon(x) \leq f_\alpha(x) \leq \frac{n|B|}{n-\alpha}$$

   e

$$|\nabla f_\varepsilon(x)| \leq \int_{B \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dy \leq \int_B \frac{1}{|y|^{\alpha+1}}\, dy = \frac{n|B|}{n-1-\alpha}\,,$$

   da cui si ottiene $f_\alpha \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ per $\alpha < n-1$.