Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

30 marzo 2015

Esercizio 1. Sia M un sottospazio chiuso di $L^2(0,1)$ contenuto in $C([0,1])$.

i) Dimostrare che esiste $C > 0$ tale che $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^2}$ per ogni $u \in M$.

ii) Dimostrare che, per ogni $x \in [0,1]$, esiste $g_x \in M$ tale che $\|g_x\|_{L^2} \leq C$ e

$$u(x) = \langle u, g_x \rangle_{L^2} \qquad \text{per ogni } u \in M.$$

iii) Dimostrare che M ha dimensione finita.

Esercizio 2. Sia $H = H_0^1((0,2))$ munito della norma

$$\|u\|_H^2 = \int_0^2 u'(x)^2 \, dx.$$

Sia $T : H \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da $Tu = u(1)$ per ogni $u \in H$.

i) Dimostrare che T è lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T.

Esercizio 3. Per ogni successione $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia $T_\alpha(x)$ la successione definita da

$$T_\alpha(x)_n = \frac{x_n}{n^\alpha} \quad n \in \mathbb{N}.$$

i) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $T_\alpha : \ell^1 \to \ell^2$ è ben definito, lineare e continuo.

ii) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $T_\alpha : \ell^2 \to \ell^1$ è ben definito, lineare e continuo.

iii) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $T_\alpha : \ell^1 \to \ell^2$ è compatto.

iv) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $T_\alpha : \ell^2 \to \ell^1$ è compatto.

Soluzione Esercizio 1.

i) Si vede facilmente che per ogni $u \in L^2(0,1)$ vale

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

Se ne deduce che la chiusura di M in $L^2(0,1)$ implica la chiusura di M in $C^0([0,1])$. Essendo M chiuso rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ed $\|\cdot\|_{L^\infty}$, rispettivamente, ed immerso nei due spazi normati completi $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$, $(L^2(0,1), \|\cdot\|_{L^2})$, rispettivamente, M risulta Banach con le due norme. Essendo esse confrontabili per quanto visto sopra, per il Teorema dell'applicazione aperta esse devono essere equivalenti. (Infatti definita $\iota : (M, \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (M, \|\cdot\|_{L^2})$ la mappa identità, ι è continua e bigettiva. Per il teorema dell'applicazione aperta l'inversa ι^{-1} è un'applicazione continua, da cui segue esiste $C > 0$ tale che $\|u\|_{L^\infty} \leq C$ per ogni $u \in M \cap B_1^{L^2}$.)

ii) Dato $x \in [0,1]$, l'applicazione $u \to u(x)$ è continua su $(M, \|\cdot\|_{L^2})$, in quanto $|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^2}$ per ogni $u \in M$. Per il Teorema di Riesz esiste quindi $g_x \in M$ tale che $u(x) = \langle u, g_x\rangle_{L^2}$ per ogni $u \in M$. Inoltre, si ha

$$\|g_x\|_{L^2} = \sup_{u \in M \cap B_1^{L^2}} \langle u, g_x\rangle_{L^2} = \sup_{u \in M \cap B_1^{L^2}} u(x) \leq \sup_{u \in M \cap B_1^{L^2}} \|u\|_{L^\infty} \leq C\,.$$

iii) Supponiamo che M abbia dimensione infinita e sia $\{u_n\}_n$ una base ortonormale di $(M, \|\cdot\|_{L^2})$. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, g_x\rangle_{L^2}^2 = \|g_x\|_{L^2}^2 \leq C^2.$$

Usando l'uguaglianza precedente, per ogni $N \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$N = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 |u_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 |u_n(x)|^2 dx \leq C^2,$$

da cui si ottiene un assurdo per N abbastanza grande, e quindi M ha necessariamente dimensione finita.

Soluzione Esercizio 2.

i) La linearità segue subito dalla linearità dell'integrale. Per vedere che T è continuo, osserviamo che per ogni $u \in H$ possiamo scrivere

$$Tu = u(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)dx - \frac{1}{2}\int_1^2 u'(x)dx = \int_0^2 u'(x)f(x)dx\,,$$

dove abbiamo posto $f(x) = 1/2$ per $x \in (0,1)$ e $f(x) = -1/2$ per $x \in (1,2)$. Si ha quindi

$$Tu \leq \|f\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_H\,.$$

ii) Osserviamo che $f = F'$, dove $F \in H$ è definita da $F(x) = x/2$ per $x \in (0,1)$ e $F(x) = 1 - x/2$ per $x \in (1,2)$. Per quanto mostrato nel punto precedente, si ha

$$Tu = \langle u, F \rangle_H$$

da cui otteniamo

$$\|T\|_{H'} = \|F\|_H = \|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Soluzione Esercizio 3.

i) Assumiamo che $T_\alpha : \ell^1 \to \ell^2$ sia continuo. Allora per ogni $x \in \ell^1$ con $\|x\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq 1$ si ha

$$\|T_\alpha(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^2}{n^{2\alpha}} \leq C$$

per qualche $C > 0$. Applicando la disuglianza sopra ad $x = e_j$ per $j \geq 1$, se ne deduce $\frac{1}{n^{2\alpha}} \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui deve risultare che $\alpha \geq 0$.

Viceversa se $\alpha \geq 0$, la successione $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ è limitata da una costante $C > 0$ e per ogni $x \in \ell^1$ con $\|x\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq 1$ si ha

$$\|T_\alpha(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^2}{n^{2\alpha}} \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq C.$$

ii) Assumiamo che $T_\alpha : \ell^2 \to \ell^1$ sia continuo. Allora esiste $C > 0$ tale che per ogni $x \in \ell^2$ si ha

$$\|T_\alpha(x)\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n|}{n^\alpha} \leq C \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2}.$$

Presa, al variare di $N \in \mathbb{N}$, $x^N \in \ell^2$ definita da $x_n^N = 1/n^\alpha$ per $N = 1, \ldots, n$ ed $x_n^N = 0$ per $N > n$, si ha

$$\|T_\alpha(x^N)\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq C \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha}}}.$$

Passando al sup su N se ne deduce che $\alpha > 1/2$.

Viceversa se $\alpha > 1/2$, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\|T_\alpha(x)\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n|}{n^\alpha} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2} \leq C\|x\|_{\ell^2}.$$

iii) Poiché T_α deve essere anche continuo se T_α è compatto allora deve valere $\alpha \geq 0$. Poichè, per $\alpha = 0$, T_0 è l'immersione di ℓ^1 in ℓ^2, T_0 non è compatto (basta considerare l'immagine della successione e_j). Vediamo invece che la condizione $\alpha > 0$ è sufficiente alla compattezza di T_α.

T_α risulta limite di operatori di rango finito. Infatti, per $N \in \mathbb{N}$, sia $T_\alpha^N : \ell^1 \to \ell^2$ definito dalla moltiplicazione termine a termine della successione $x \in \ell^1$ con la successione x^N definita nel punto *ii*). Allora per ogni $x \in \ell^1$ con $\|x\|_{\ell^1} \leq 1$ risulta

$$\|(T_\alpha - T_\alpha^N)(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x_n|^2}{n^{2\alpha}} \leq \frac{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|}{(N+1)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(N+1)^{2\alpha}}.$$

Ne deriva che $\|T_\alpha - T_\alpha^N\| \to 0+$ quando $N \to +\infty$.

iv) Poiché T_α deve essere anche continuo se T_α è compatto allora deve valere $\alpha > 1/2$. Vediamo che questa condizione è anche sufficiente perché T_α risulta limite di operatori di rango finito. Per $N \in \mathbb{N}$ sia $T_\alpha^N : \ell^2 \to \ell^1$ definito dal prodotto scalare in ℓ^2 con l'elemento x^N di ℓ^2 definito nel punto *ii*). Allora per ogni $x \in \ell^2$ con $\|x\|_{\ell^2} \leq 1$ risulta

$$\|(T_\alpha - T_\alpha^N)(x)\|_{\ell^1} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|x_n|}{n^\alpha} \leq \|x\|_{\ell^2} \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}} \leq \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}}.$$

Ne deriva che $\|T_\alpha - T_\alpha^N\| \to 0+$ quando $N \to +\infty$.