COGNOME:	NOME:	MATR.:

ANALISI REALE E COMPLESSA 3^o appello — 11/7/2012

Facoltà di Ingegneria, Area dell'Informazione

E.1) Mostrare che la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$$

è convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e calcolarne il limite.
Dire se il risultato rimane vero in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

E.2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < x < -1 \end{cases}$$

calcolare la serie di Fourier della prolungata 2π-periodica di f.

E.3) Calcolare, utilizzando il Teorema dei Residui, la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x\sin(x)}{1+x^2}.$$

Dire se $\hat{f}$ è continua e per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R})$.

E.4) Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq -b$, si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{-ibz}}{z^2} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Classificare le singolarità di f e calcolare i residui in tali punti.
Dire se l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}\, dx$$

è convergente e, nel caso, calcolarne il valore.

SOLUZIONI

E.1) Data $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\phi(0) = 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi f_n \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x} \sin(nx) \, dx = 0,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\frac{\phi(x)}{x} \in L^1(\mathbb{R})$. Sia ora $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supporto in $[-R, R]$, dal calcolo precedente si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi f_n \, dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \sin(nx) \, dx + \phi(0) \lim_{n\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(nx)}{x} \, dx \\
&= \phi(0) \lim_{n\to+\infty} \int_{-nR}^{nR} \frac{\sin(y)}{y} \, dy = \pi\phi(0).
\end{aligned}$$

La successione f_n converge quindi a $\pi\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, dove δ è la delta di Dirac concentrata in 0.

Lo stesso argomento funziona con $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e quindi si ha la convergenza anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

E.2) Essendo la funzione dispari e regolare a tratti, possiamo esprimerla con la serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

con

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(k)}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

E.3) Essendo f una funzione pari, si ha

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin(x)}{1 + x^2} \cos(\lambda x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + x^2} \big(\sin\big((\lambda + 1)x\big) - \sin\big((\lambda - 1)x\big)\big) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + x^2} \left(e^{(\lambda+1)x} - e^{(\lambda-1)x}\right) \, dx \right).
\end{aligned}$$

Per il Teorema dei Residui e il Lemma di Jordan, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x e^{i\alpha x}}{1 + x^2} \, dx = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{res}\left(z e^{i\alpha z}/(1 + z^2), i\right) = i\pi e^{-\alpha} & \text{se } \alpha > 0 \\ -2\pi i \operatorname{res}\left(z e^{i\alpha z}/(1 + z^2), -i\right) = -i\pi e^{\alpha} & \text{se } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda + 1}{|\lambda + 1|} e^{-|\lambda+1|} - \frac{\lambda - 1}{|\lambda - 1|} e^{-|\lambda-1|} \right) \qquad \lambda \neq \pm 1\,.$$

La funzione $\hat{f}$ è discontinua in $\lambda = \pm 1$ e appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

E.4) La funzione $f_{a,b}$ ha un solo polo semplice in $z = 0$, con residuo $\operatorname{res}(f_{a,b}, 0) = (a + b)i$.

Per il Teorema dei Residui e il Lemma di Jordan, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iz} - 1}{z^2} \, dz = \pi i \operatorname{res}(f_{1,0}, 0) = -\pi.$$