

Pisa, 19 giugno 2007

1) Si consideri la curva di equazione

$$x + x^4 y - y^2 \sin y = 0.$$

Si dica se, in un intorno del punto  $(x, y) = (0, \pi)$ , la curva è grafico di una funzione  $y = f(x)$  e, in caso affermativo, si calcoli  $f'(0)$ .

2) Calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dalla curva di equazione:

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

3) Sia  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ . Si dica se il seguente integrale è convergente e, nel caso, se ne calcoli il valore:

$$\int_R \frac{x^2}{1 + (x^2 + y^2)^4} dx dy.$$

4) Al variare dei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^3$ , soggetti al vincolo

$$\sum_{i=1}^3 |P_{i+1} - P_i| = L > 0,$$

si calcoli il volume massimo del tetraedro avente per vertici tali punti.