Compito di Analisi Matematica III e IV

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2004/05

Pisa, 16 giugno 2005

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica III e IV svolga gli esercizi 1), 5) e 6) ed eventualmente il secondo dei due esercizi facoltativi.

I Parte.

1) Al variare dei numeri α e β) con $\alpha > 0$ si considerino

$$S_\alpha = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, 0 \leq z \leq (x^2+y^2)^\alpha \leq 1\right\}$$

e la funzione

$$f_\beta(x,y,z) = \frac{z}{(1+x^4+y^4+2x^2y^2)} \, \frac{1}{\big(\arctan(x^2+y^2)\big)^\beta}.$$

a) Si dimostri l'integrabilità di f_β su S_α per $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ e si calcoli l'integrale

$$\int_{S_1} f_{-1}(x,y,z)\, dxdydz.$$

b) Si studi l'integrabilità di f_β su S_α al variare di α e β con $\alpha > 0$.

2) Si determinino il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xy - yz + xz \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

sul vincolo

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti serie di funzioni sul loro dominio di definizione

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{x^n}, \quad \text{ove} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arccos\left[\left(1 - \frac{1}{n^\alpha(1+x^2)}\right)^{1/\sqrt{n}}\right], \quad \text{ove} \quad x \in [0, +\infty[. \tag{2}$$

4) [facoltativo] Siano $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni integrabili per ogni n in $\mathbb{N}$ e si assuma che esista una funzione integrabile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g_n(x) \geq f(x)$ per quasi ogni x in $\mathbb{R}$ e per ogni n in $\mathbb{N}$. Provare che le condizioni

$$\liminf_{n\to\infty} g_n \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \leq 0 \tag{3}$$

implicano che $\int_{\mathbb{R}} |g_n| \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.

II Parte.

5) Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x' = y\,(x^2 + y^2 + 1) \\ y' = -x\,(x^2 + y^2 - 1)\,. \end{cases} \tag{4}$$

a) Tracciare le orbite delle soluzioni.

b) Determinare l'insieme di definizione delle soluzioni massimali e motivarne la risposta.

c) Si dica se esistono soluzioni non periodiche, motivando la risposta.

6) Si consideri il sottoinsieme S_λ di $\mathbb{R}^3$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = \lambda \end{cases} \tag{5}$$

a) Si determini l'insieme $\mathcal{N}$ dei valori di λ tali che $S_\lambda \neq \emptyset$

b) Si determini l'insieme $\mathcal{S}$ dei valori λ tali che S_λ è una sottovarietà di dimensione uno.

c) Data la funzione $f(x, y, z) = (x^2 + xy + y^2)/2$, si determinino i punti di massimo e di minimo di f su S_λ, assieme ai valori $\max_{S_\lambda} f$ e $\min_{S_\lambda} f$, al variare di λ in $\mathcal{S}$.

7) Si consideri la seguente applicazione $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(x, y) = \Big(x^2 + y^2 - xy, +xy\Big).$$

a) Si determini il luogo dei punti critici della funzione ϕ.

b) Si determini l'immagine della funzione.

c) Si determini il numero di elementi di $\phi^{-1}(x_0, y_0)$ al variare del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

8) [facoltativo] Sia f in $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ e sia $\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Consideriamo una soluzione massimale $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ del sistema differenziale $y' = f(y)$ e supponiamo che $f(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathcal{C}$ e che $u(I) \subset \mathcal{C}$. Provare che $I = \mathbb{R}$ e u è periodica.