Compito di Analisi Matematica I e II

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 28 giugno 2004

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica I e II svolga gli esercizi 2), 3) e 6) ed eventualmente il secondo dei due esercizi facoltativi

I Parte.

1) Dire in quanti modi 10 coppie possono sedersi attorno ad un tavolo in modo che i due elementi della coppia siedano uno accanto all'altro, e che uomini e donne siano alternati tra loro.

2) Si consideri l'equazione

$$y = \arccos\left(\frac{xe^{-x}}{1 - xe^{-x}}\right).$$

Si studi al variare di y in $\mathbb{R}$ l'esistenza ed il numero delle soluzioni, motivando la risposta.

3) Al variare del parametro α in $\mathbb{R}$, si discuta la convergenza delle seguenti serie

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n}\right|^{\frac{1}{2}},$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}}{n}.$$

4) [facoltativo] Sia $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile su $]0, +\infty[$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false, provandole nel primo caso o confutandole con un esempio nel secondo caso.

1. La funzione f è limitata su $[0, +\infty[$.

2. Esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ finito o infinito.

3. La funzione f è uniformemente continua su $[0, +\infty[$.

II Parte.

5) Si discuta, al variare del parametro reale α, l'esistena e l'unicità del seguente problema ai limiti

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y'(x) + y(x) &= e^x \\ y(0) = y(1) &= 0, \end{aligned}$$

determinando le soluzioni (quando esistono).

6) Si studino le soluzioni della seguente equazione differenziale, al variare dei dati iniziali (x_0, y_0), e se ne tracci un grafico approssimativo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(1+y(x))\ x}{\cosh(y(x))\log(1+y(x))(1+y(x)) + \sinh(y(x))} \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

7) Al variare del parametro $\alpha > 0$, si dica se esiste e, nel caso, si calcoli il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^x - 1}{x^2 + |\log y|^{2\alpha}}.$$

8) **[facoltativo]** Sia $I = [a, b]$ un intervallo e siano $x_1, \ldots, x_k$ punti distinti di I. Date $a_0, \ldots a_n \in C(I)$, con $a_n \neq 0$ su I, si consideri l'equazione differenziale di ordine n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}(x) = 0,$$

con le condizioni

$$y(x_1) = \ldots = y(x_k) = 0.$$

1. Si discuta, al variare di k ed n, l'esistenza di soluzioni non identicamente nulle.
2. Cosa si può dire dell'insieme delle soluzioni?