Volumen Simplicial Ideal

Marco Moraschini,
Departamento de Matemáticas - Universidad de Pisa
Trabajo conjunto con Roberto Frigerio

El Volumen simplicial relativo & Ejemplos

Definición. *Dada una cadena relativa* $c = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \sigma_j \in C_*(M, \partial M; \mathbb{R})$*, definimos la* ℓ^1-norma *de* c *como* $|c|_1 := \sum_{j=0}^{k} |a_j|$.
Sea M *una variedad conexa, compacta y orientada con borde. Definimos el* **volumen simplicial relativo (VSR)** *de* M, $\|M\|$, *como* $\|M\| = \inf\{|c|_1 \mid c \in C_n(M, \partial M; \mathbb{R})$ *tal que* $[c] = [M, \partial M]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *donde* $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$ *es la clase fundamental relativa de* M.

Teorema ([1]). *Si* M *es un handlebody de género* $g \geq 2$ *o es el producto de una superficie con un intervalo, entonces su volumen simplicial relativo* $\|M\|$ *es proporcional a* $\|\partial M\|$.

Teorema ([4]). *Si* M *es la compactación natural de una* n*-variedad hiperbólica completa de volumen finito, entonces* $\|M\| = Vol(M)/v_n$.

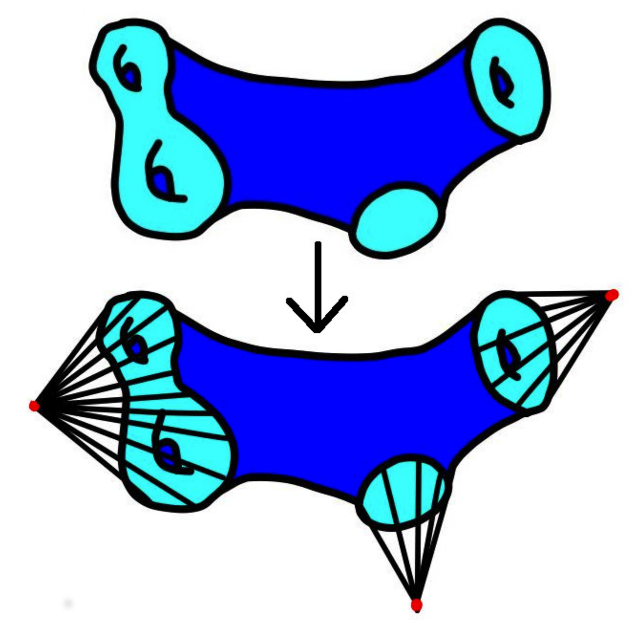
Espacios marcados & Triangulaciones ideales

Definición. *Un* **espacio marcado** *es una par topológico* (X, B) *tal que* B *es un subconjunto cerrado y discreto de* X *en el cual cada punto* $b \in B$ *tiene un entorno cerrado en* X *homeomorfo a un cono topológico.*

Definición. *Dada una variedad con borde* M*, definimos el* **espacio marcado asociado a** M, $(X, B)_M$*, como sigue:* X *es cociente topológico obtenido partiendo de* M *y colapsando por separado cada componente conexa de* ∂M*, mientras* B *es un subconjunto finito de* X *que se corresponde con las componentes conexas de* ∂M.

Definición. *Una* **triangulación ideal** *de* M *es la realización geométrica de* $(X, B)_M$ *como un* Δ*-complejo donde el conjunto de vértices coincide con* B.

Ejemplos



Homologia marcada

Definición. *Dado un espacio marcado* (X, B)*, un simplex singular* $\sigma \colon \Delta^n \to X$ *se dice* **admisible** *si* $\sigma^{-1}(B)$ *es un subcomplejo (posiblemente vacío) de* Δ^n*. El conjunto de los simplices* admisibles *en* X *define un subcomplejo* $\widehat{C}_*^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R})$ *del complejo singular* $C_*(X; \mathbb{R})$ *que contiene a* $C_*(B; \mathbb{R})$*. Definimos el* **complejo de cadenas marcado** *de* (X, B) *como* $C_*^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R}) = \widehat{C}_*^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R}) / C_*(B; \mathbb{R})$*. La* **homología marcada** *de* (X, B), $H^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R})$*, es la homología del complejo de cadenas marcado* $(C_*^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R}), \partial_*)$.

Teorema 1 ([2]). *Hay un isomorfismo* $\Psi_n \colon H_n(M, \partial M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_n^{\mathcal{M}}(X, B; \mathbb{R})$.

Volumen simplicial ideal

Definición. *Sea* M *una* n*-variedad conexa, compacta, orientada con borde. Definimos el* **volumen simplicial ideal (VSI)** *de* M, $\|M\|_{\mathcal{I}}$ *como* $\|M\|_{\mathcal{I}} = \inf\{|c|_1 \mid c \in C_n^{\mathcal{M}}(M, \partial M; \mathbb{R})$ *tales que* $[c] = [M, \partial M]^{\mathcal{M}}\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*, donde* $[M, \partial M]^{\mathcal{M}} \in H_n^{\mathcal{M}}(M, \partial M; \mathbb{R})$ *es la clase fundamental marcada de* M*, i.e.* $[M, \partial M]^{\mathcal{M}} = \Psi_n([M, \partial M])$.

Propiedades fundamentales

Teorema 2 ([2]). *El numero mínimo de simplices en una triangulación ideal de una variedad compacta* M, $c(M)$*, es una cota superior del volumen simplicial ideal:*

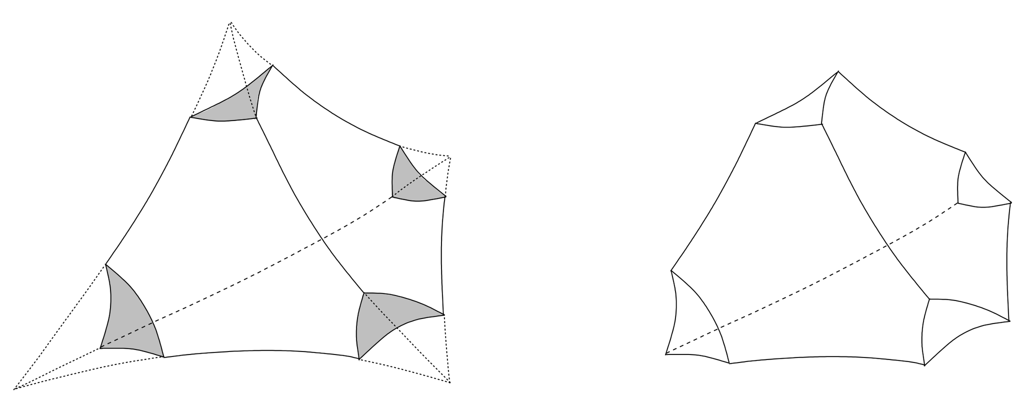
$$\|M\|_{\mathcal{I}} \leq c(M).$$

Teorema 3 ([2]). *Sea* $f \colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ *una aplicacción entre variedades compactas, conexas y orientadas de la misma dimension. Entonces, se tiene que:*

$$\|M\|_{\mathcal{I}} \geq |deg(f)| \|N\|_{\mathcal{I}}.$$

En particular, el volumen simplicial ideal es un **invariante homotópico** *de variedades con borde.*

Un tetraedro hiperbólico truncado



VSI versus VSR

Teorema 4 ([2]). *Existe una constante positiva* K_n *que depende solamente de la dimension* n *de* M *tal que se satisface:*

$$\|M\|_{\mathcal{I}} \leq \|M\| \leq K_n \|M\|_{\mathcal{I}}.$$

En particular, $\|M\|_{\mathcal{I}} = 0$ *si y solamente si* $\|M\| = 0$.

Teorema 5 ([2]). *Sea* M *una* n*-variedad compacta tal que cada componente de su borde tiene grupo fundamental* **amenable***. Entonces,*

$$\|M\|_{\mathcal{I}} = \|M\|.$$

En particular, si M *es la compactación natural de una* n*-variedad hiperbólica completa de volumen finito, entonces* $\|M\|_{\mathcal{I}} = \frac{Vol(M)}{v_n}$.

Nuevos cálculos

Teorema 6 ([3]). *Sea* $\ell \leq cosh^{-1}((3+\sqrt{3})/4)$*. Entonces, el tetraedro truncado hiperbólico regular con lados de longitud* ℓ *tiene volumen máximo entre los tetraedros truncados hiperbólicos con lados de longitud mayor o igual que* ℓ.

Teorema 7 ([2]). *Cada* 3*-variedad hiperbólica* M *con borde conexo y geodésico de género* $\mathrm{g} \geq 2$ *satisface*

$$\|M\|_{\mathcal{I}} \geq \mathrm{g}.$$

Además, la igualdad es cierta si y solamente si M *admite una triangulación ideal con* $\mathbf{g}$ *simplices ideales.*

Bibliografía

[1] M. Bucher, R. Frigerio and C. Pagliantini, *The simplicial volume of 3-manifolds with boundary*, Journal of Topology 8, 2015.

[2] R. Frigerio and M. Moraschini, *Ideal simplicial volume of manifolds with boundary*, arXiv:1802.05223.

[3] R. Frigerio and M. Moraschini, *On volumes of hyperideal tetrahedra with contrained edge legths*, arXiv:1801.05326.

[4] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture notes, 1978.