

4-varietà iperboliche

Bruno Martelli

5 marzo 2015

Una n -varietà iperbolica M è:

Una n -varietà *iperbolica* M è:

- una n -varietà riemanniana completa con curvatura sezionale -1 ,

Una n -varietà iperbolica M è:

- una n -varietà riemanniana completa con curvatura sezionale -1 ,
- $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ con $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sottogruppo discreto che agisce liberamente su \mathbb{H}^n .

Una n -varietà iperbolica M è:

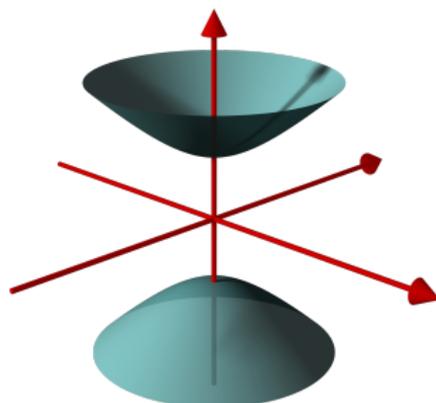
- una n -varietà riemanniana completa con curvatura sezionale -1 ,
- $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ con $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sottogruppo discreto che agisce liberamente su \mathbb{H}^n .

$$\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = O_*(n, 1)$$

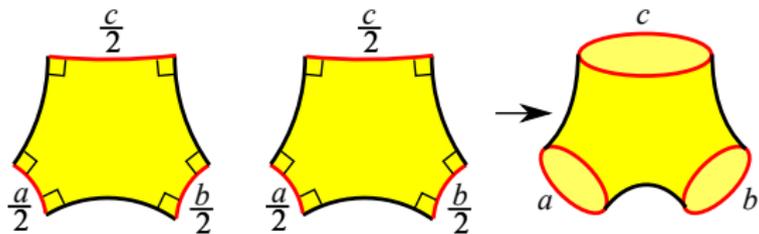
Lemma Selberg:

$\Gamma < O_*(n, 1)$ discreto e f.g.

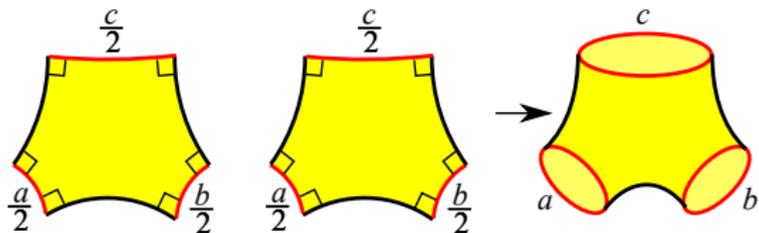
$\implies \exists \Gamma' < \Gamma$ di indice finito che agisce liberamente su \mathbb{H}^n .



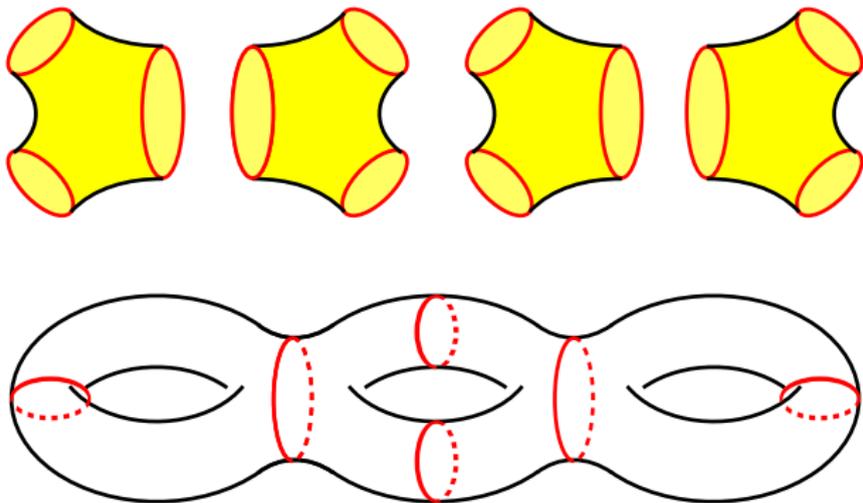
Pantaloni iperbolici:



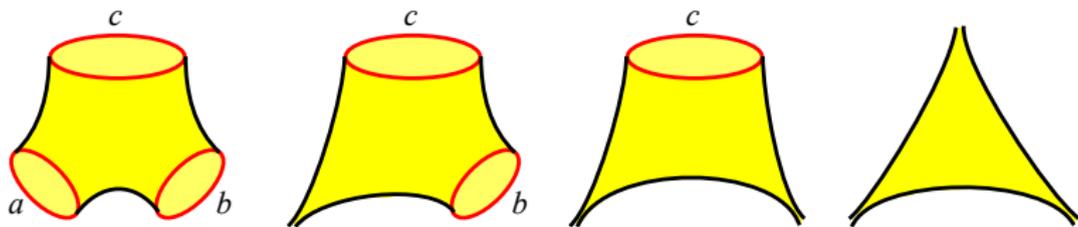
Pantaloni iperbolici:



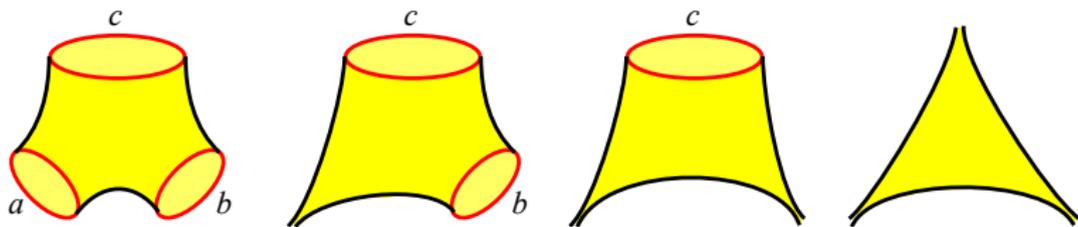
Superfici iperboliche:



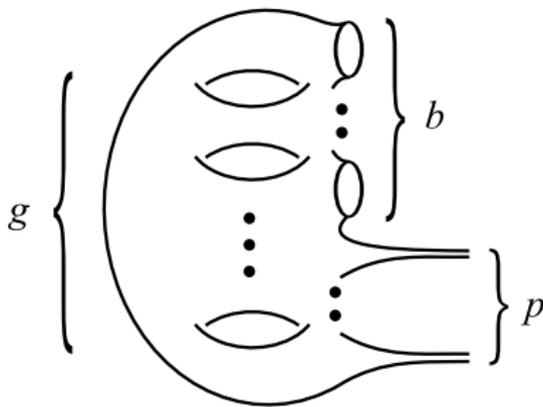
Pantaloni con cuspidi:



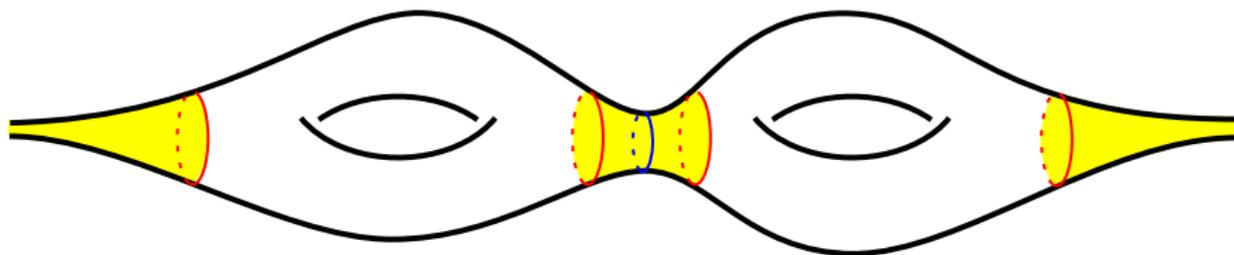
Pantaloni con cuspidi:



Superfici di tipo finito, con cuspidi e/o bordo geodetico:

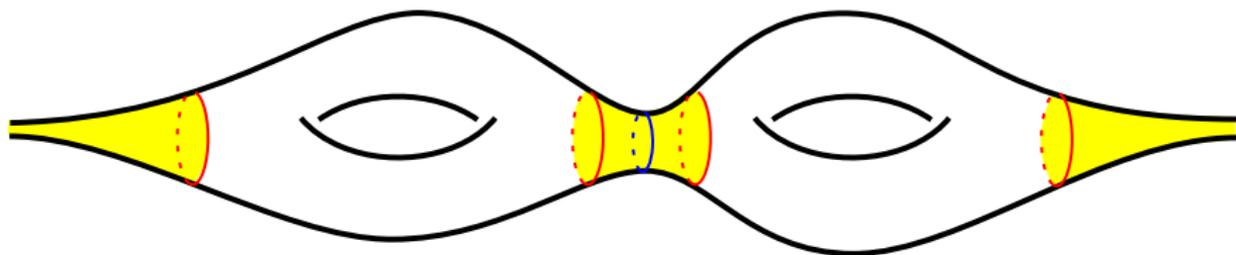


Decomposizione thick-thin per varietà iperboliche:



I punti con raggio di iniettività $< \varepsilon_n$ formano *tubi* (intorni di geodetiche semplici chiuse) e *cuspidi*.

Decomposizione thick-thin per varietà iperboliche:



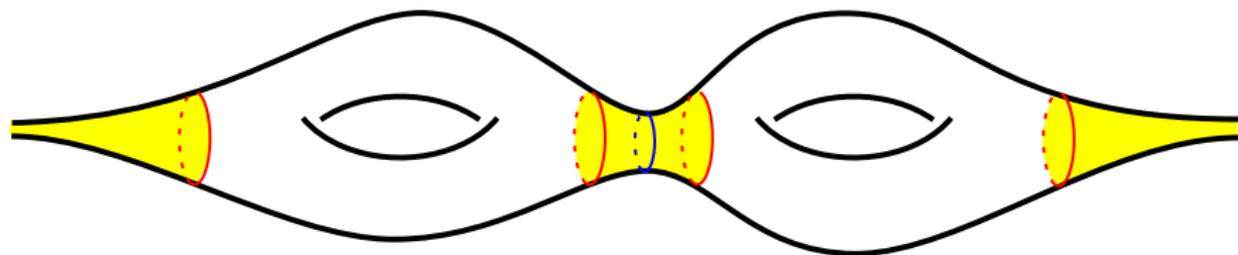
I punti con raggio di iniettività $< \varepsilon_n$ formano *tubi* (intorni di geodetiche semplici chiuse) e *cuspidi*.

Una cuspidè è isometrica a

$$M \times [0, +\infty)$$

con M varietà *euclidea*, riscalata di e^{-2t} al tempo $t \in [0, +\infty)$.

Decomposizione thick-thin per varietà iperboliche:



I punti con raggio di iniettività $< \varepsilon_n$ formano *tubi* (intorni di geodetiche semplici chiuse) e *cuspidi*.

Una cuspidi è isometrica a

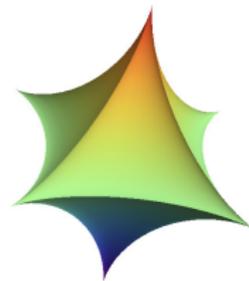
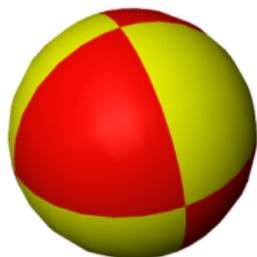
$$M \times [0, +\infty)$$

con M varietà euclidea, riscalata di e^{-2t} al tempo $t \in [0, +\infty)$.

$$\text{Vol}(\text{cuspidi}) = \frac{\text{Vol}(M)}{n-1}.$$

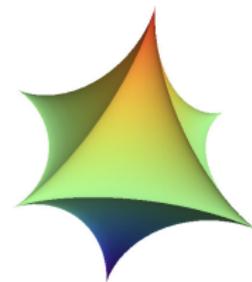
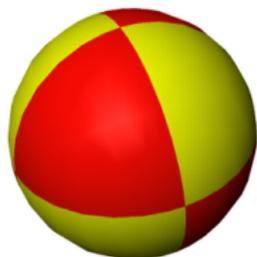
3-varietà iperboliche

Poliedri regolari:



3-varietà iperboliche

Poliedri regolari:



poliedro	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{2\pi}{5}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$
tetraedro	ideale \mathbb{H}^3	S^3	S^3	S^3
cubo	ideale \mathbb{H}^3	\mathbb{H}^3	\mathbb{R}^3	S^3
ottaedro			ideale \mathbb{H}^3	S^3
icosaedro				\mathbb{H}^3
dodecaedro	ideale \mathbb{H}^3	\mathbb{H}^3	\mathbb{H}^3	S^3

Una 3-varietà iperbolica M di volume finito è $M = \text{int}(N)$ con N compatta e bordo ∂N formato da tori. Ad ogni toro in ∂N corrisponde una cuspid

$$T \times [0, +\infty)$$

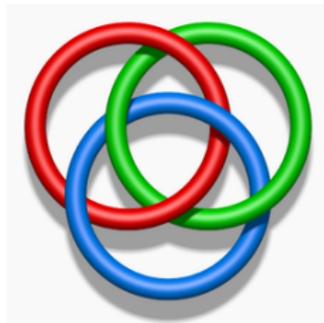
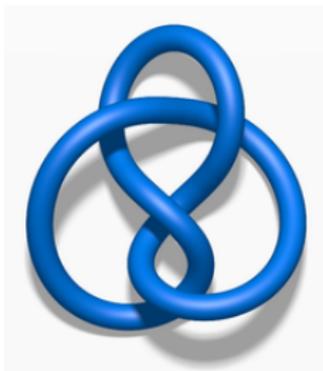
con T toro euclideo.

Una 3-varietà iperbolica M di volume finito è $M = \text{int}(N)$ con N compatta e bordo ∂N formato da tori. Ad ogni toro in ∂N corrisponde una cuspid

$$T \times [0, +\infty)$$

con T toro euclideo.

I complementari in S^3 del *nodo figura otto* e del *link borromeo* sono iperbolic



Si decompongono in tetraedri e ottaedri ideali, rispettivamente.

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

- (Vari autori '60) Esiste un modo canonico di decomporre M lungo sfere e tori.

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

- (Vari autori '60) Esiste un modo canonico di decomporre M lungo sfere e tori.
- (Thurston '80 - Perelman '00) Ogni pezzo della decomposizione ha una metrica localmente omogenea, completa, di volume finito.

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

- (Vari autori '60) Esiste un modo canonico di decomporre M lungo sfere e tori.
- (Thurston '80 - Perelman '00) Ogni pezzo della decomposizione ha una metrica localmente omogenea, completa, di volume finito.
- Ci sono 8 metriche di questo tipo:

$$S^3, \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H}^3, \quad S^2 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \text{Nil}, \quad \text{Sol}, \quad \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{R})}.$$

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

- (Vari autori '60) Esiste un modo canonico di decomporre M lungo sfere e tori.
- (Thurston '80 - Perelman '00) Ogni pezzo della decomposizione ha una metrica localmente omogenea, completa, di volume finito.
- Ci sono 8 metriche di questo tipo:

$$S^3, \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H}^3, \quad S^2 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \text{Nil}, \quad \text{Sol}, \quad \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{R})}.$$

- Le varietà con le 7 metriche non iperboliche hanno tutte delle fibrazioni particolari e sono classificate (Seifert '30).

Sia M una 3-varietà compatta, eventualmente con bordo formato da tori.

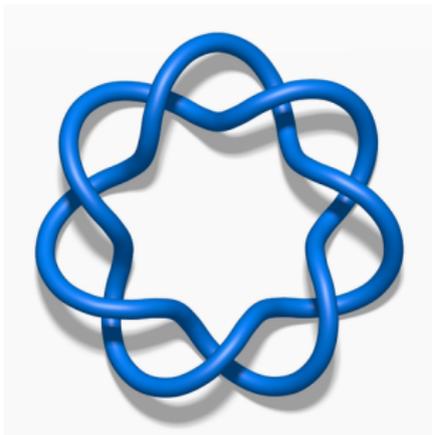
- (Vari autori '60) Esiste un modo canonico di decomporre M lungo sfere e tori.
- (Thurston '80 - Perelman '00) Ogni pezzo della decomposizione ha una metrica localmente omogenea, completa, di volume finito.
- Ci sono 8 metriche di questo tipo:

$$S^3, \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H}^3, \quad S^2 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \text{Nil}, \quad \text{Sol}, \quad \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{R})}.$$

- Le varietà con le 7 metriche non iperboliche hanno tutte delle fibrazioni particolari e sono classificate (Seifert '30).
- (Rigidità di Mostow) La metrica iperbolica è unica.

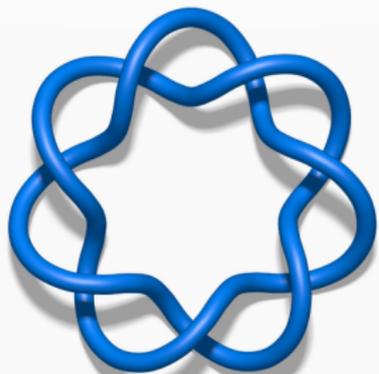
Ci sono tre tipi di nodi:

Ci sono tre tipi di nodi:

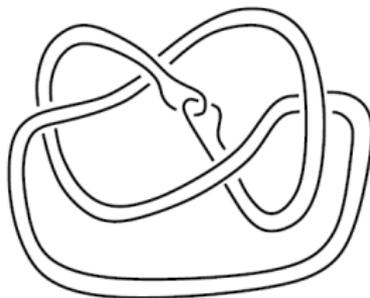


torico

Ci sono tre tipi di nodi:

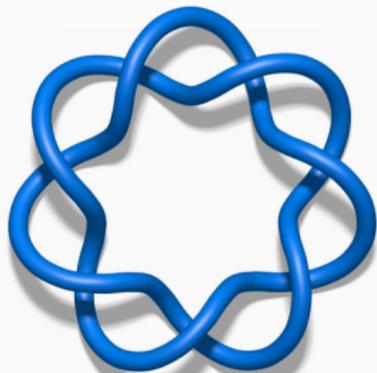


torico

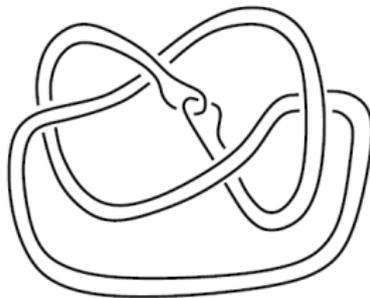


satellite

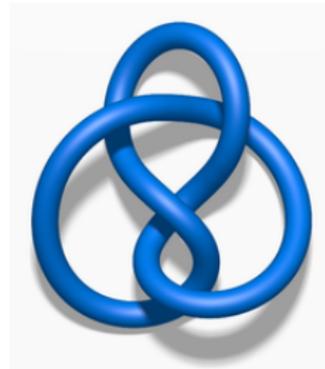
Ci sono tre tipi di nodi:



torico

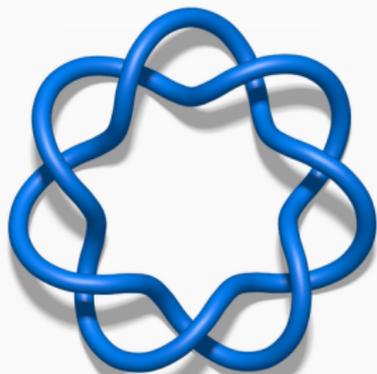


satellite

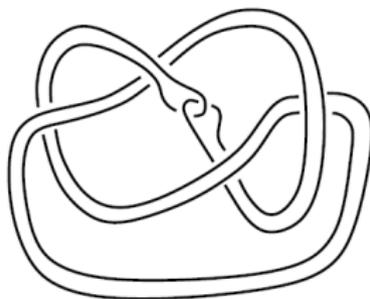


iperbolico

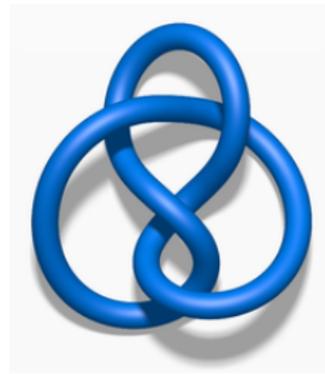
Ci sono tre tipi di nodi:



torico



satellite



iperbolico

incroci	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
torici	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
satelliti	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
iperbolici	0	1	1	3	6	20	48	164	551	2176	9985	46969

Conseguenze della geometrizzazione:

Conseguenze della geometrizzazione:

Sia M tre-varietà chiusa (cioè compatta e senza bordo).

- Congettura di Poincaré: $\pi_1(M) = \{e\} \implies M = S^3$.

Conseguenze della geometrizzazione:

Sia M tre-varietà chiusa (cioè compatta e senza bordo).

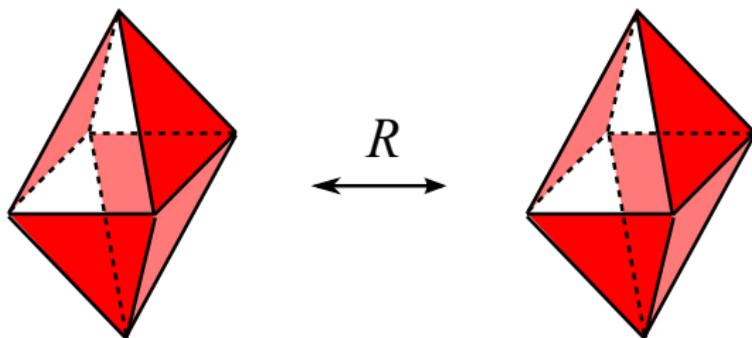
- Congettura di Poincaré: $\pi_1(M) = \{e\} \implies M = S^3$.
- Congettura space-form: $|\pi_1(M)| < \infty \implies M = S^3/\Gamma, \Gamma < \text{SO}(4)$.

Conseguenze della geometrizzazione:

Sia M tre-varietà chiusa (cioè compatta e senza bordo).

- Congettura di Poincaré: $\pi_1(M) = \{e\} \implies M = S^3$.
- Congettura space-form: $|\pi_1(M)| < \infty \implies M = S^3/\Gamma$, $\Gamma < \text{SO}(4)$.
- Congettura di iperbolizzazione: $|\pi_1(M)| = \infty$, indecomponibile e non contiene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, allora $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$.

L'ottaedro ideale regolare ha angoli diedrali retti. Lo possiamo raddoppiare lungo le facce rosse:



Otteniamo una 3-varietà con bordo geodetico non compatto, con:

- 4 sfere con 3 punture come bordo geodetico,
- 6 *cuspidi anulari*, del tipo $S^1 \times [0, 1] \times [0, +\infty)$.

Il blocco è combinatorialmente come un tetraedro:



$\{\text{facce}\} \longleftrightarrow \{\text{sfer e con 3 punture geodetiche}\}$
 $\{\text{spigoli}\} \longleftrightarrow \{\text{cuspidi anulari}\}$

Il blocco è combinatorialmente come un tetraedro:

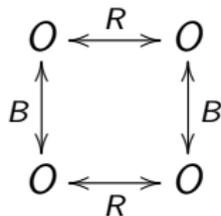


$$\begin{aligned}\{\text{facce}\} &\longleftrightarrow \{\text{sfer e con 3 punture geodetiche}\} \\ \{\text{spigoli}\} &\longleftrightarrow \{\text{cuspidi anulari}\}\end{aligned}$$

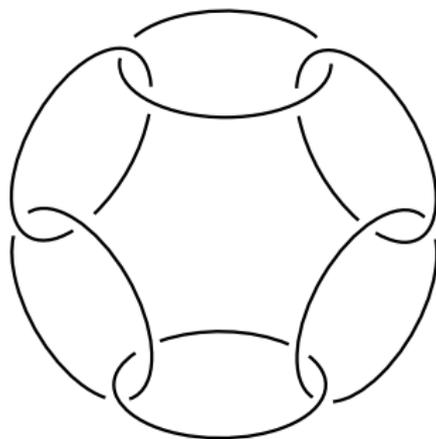
Una *triangolazione* è il dato di n tetraedri con facce identificate a coppie. Otteniamo una mappa iniettiva:

$$\{\text{triangolazioni}\} \longrightarrow \{\text{tre - varietà iperboliche}\}$$

Se specchiamo il blocco lungo il bordo otteniamo una varietà iperbolica che si decompone in 4 ottaedri secondo lo schema seguente:



è il complementare del *chain link* mostrato a destra.



Questa è la *varietà ottaedrale*.

4-varietà iperboliche

Ci sono 6 politopi regolari in dimensione 4:

nome	3-facce	2-facce	spigoli	vertici	link dei vertici
5-cella	5 tetraedri	10	10	5	tetraedro
8-cella	8 cubi	24	32	16	tetraedro
16-cella	16 tetraedri	32	24	8	ottaedro
24-cella	24 ottaedri	96	96	24	cubo
120-cella	120 dodecaedri	720	1200	600	tetraedro
600-cella	600 tetraedri	1200	720	120	icosaedro

4-varietà iperboliche

Ci sono 6 politopi regolari in dimensione 4:

nome	3-facce	2-facce	spigoli	vertici	link dei vertici
5-cella	5 tetraedri	10	10	5	tetraedro
8-cella	8 cubi	24	32	16	tetraedro
16-cella	16 tetraedri	32	24	8	ottaedro
24-cella	24 ottaedri	96	96	24	cubo
120-cella	120 dodecaedri	720	1200	600	tetraedro
600-cella	600 tetraedri	1200	720	120	icosaedro

La 24-cella ideale iperbolica ha angoli diedrali retti perché il link è un cubo.

4-varietà iperboliche

Ci sono 6 politopi regolari in dimensione 4:

nome	3-facce	2-facce	spigoli	vertici	link dei vertici
5-cella	5 tetraedri	10	10	5	tetraedro
8-cella	8 cubi	24	32	16	tetraedro
16-cella	16 tetraedri	32	24	8	ottaedro
24-cella	24 ottaedri	96	96	24	cubo
120-cella	120 dodecaedri	720	1200	600	tetraedro
600-cella	600 tetraedri	1200	720	120	icosaedro

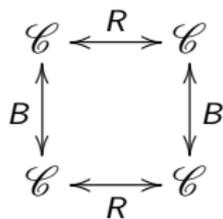
La 24-cella ideale iperbolica ha angoli diedrali retti perché il link è un cubo.

È l'involuppo convesso di 24 punti del tipo $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$.

La 24-cella \mathcal{C} ha una 3-colorazione naturale in Blu, Rosso, Verde.

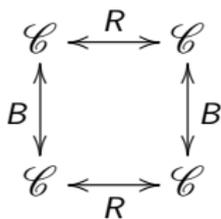
La 24-cella \mathcal{C} ha una 3-colorazione naturale in Blu, Rosso, Verde.

Ne prendiamo 4 copie e le incolliamo seguendo lo schema:

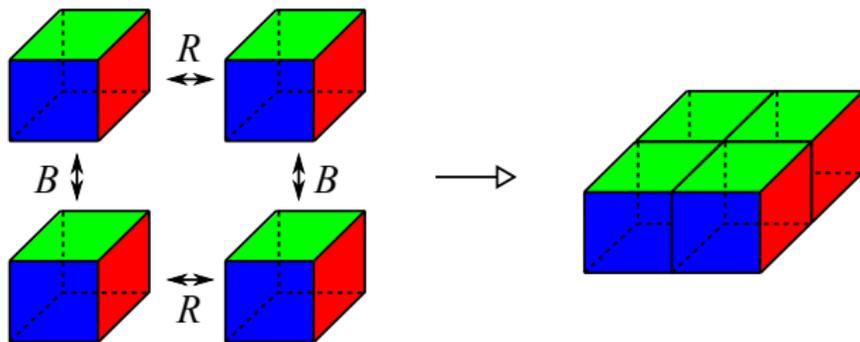


La 24-cella \mathcal{C} ha una 3-colorazione naturale in Blu, Rosso, Verde.

Ne prendiamo 4 copie e le incolliamo seguendo lo schema:



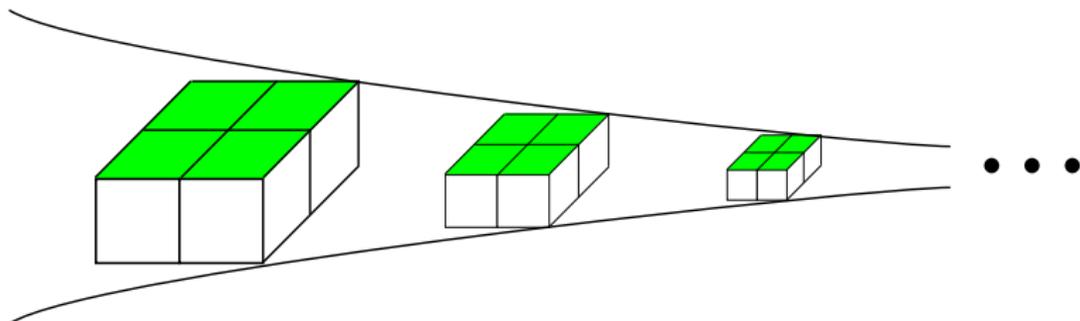
Ogni vertice ideale è il cono su un cubo 3-colorato. Quattro cubi



generano un $T \times [0, 1]$.

Otteniamo un blocco 4-dimensionale: una 4-varietà iperbolica con bordo geodetico. Ha

- 8 (verdi) componenti di bordo, isometriche alla varietà ottaedrale.
- 24 cuspidi “anulari” isometriche a $T \times [0, 1] \times [0, +\infty)$.



Ciascuna cuspidè è stretta fra due componenti di bordo verdi.

Il blocco è combinatorialmente come un ipercubo H , con

$$\begin{aligned}\{8 \text{ 3-facce of } H\} &\longleftrightarrow \{8 \text{ componenti di bordo}\} \\ \{24 \text{ 2-facce of } H\} &\longleftrightarrow \{24 \text{ cuspidi}\}\end{aligned}$$

Una faccia di H è un cubo che corrisponde (dualmente) alla varietà ottaedrale.

Il blocco è combinatorialmente come un ipercubo H , con

$$\begin{aligned}\{8 \text{ 3-facce of } H\} &\longleftrightarrow \{8 \text{ componenti di bordo}\} \\ \{24 \text{ 2-facce of } H\} &\longleftrightarrow \{24 \text{ cuspidi}\}\end{aligned}$$

Una faccia di H è un cubo che corrisponde (dualmente) alla varietà ottaedrale.

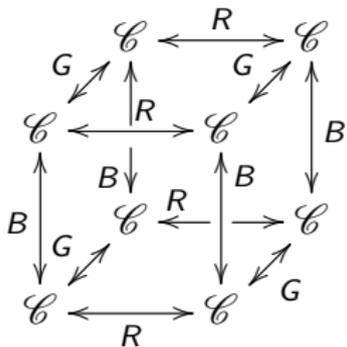
Attaccando ipercubi (e quindi blocchi) possiamo dimostrare:

Teorema (Kolpakov, M. 2014)

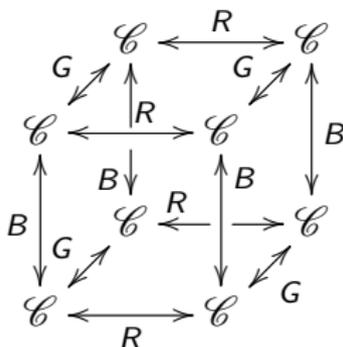
Per ogni $k > 0$ esistono 4-varietà iperboliche con k cuspidi.

Ad esempio, raddoppiando ancora il blocco otteniamo:

Ad esempio, raddoppiando ancora il blocco otteniamo:



Ad esempio, raddoppiando ancora il blocco otteniamo:



È una 4-varietà iperbolica con 24 cuspidi, ciascuna del tipo $T^3 \times [0, +\infty)$, dove T^3 è un toro piatto cubico.

Resta aperta la domanda seguente in dimensione più alta:

Domanda

Esistono varietà iperboliche con una cuspidale sola in dimensione $n \geq 5$?

Resta aperta la domanda seguente in dimensione più alta:

Domanda

Esistono varietà iperboliche con una cuspidale sola in dimensione $n \geq 5$?

Alcuni segnali negativi:

- Non ci sono politopi ideali retti in dimensione $n \geq 5$.

Resta aperta la domanda seguente in dimensione più alta:

Domanda

Esistono varietà iperboliche con una cuspidale sola in dimensione $n \geq 5$?

Alcuni segnali negativi:

- Non ci sono politopi ideali retti in dimensione $n \geq 5$.
- (Stover 2014) Non ci sono varietà iperboliche aritmetiche con una sola cuspidale in dimensione $n \geq 30$.

Esistono “blocchi” in dimensione ≥ 5 ?

Sia $M = \text{int}(N)$ iperbolica con cuspidi e ∂N unione di tori T^{n-1} .

Sia $M = \text{int}(N)$ iperbolica con cuspidi e ∂N unione di tori T^{n-1} .

Un *Dehn filling* è l'incollamento di un toro solido $D^2 \times T^{n-2}$ su uno di questi tori tramite diffeomorfismo $S^1 \times T^{n-2} \rightarrow T^{n-1}$.

Sia $M = \text{int}(N)$ iperbolica con cuspidi e ∂N unione di tori T^{n-1} .

Un *Dehn filling* è l'incollamento di un toro solido $D^2 \times T^{n-2}$ su uno di questi tori tramite diffeomorfismo $S^1 \times T^{n-2} \rightarrow T^{n-1}$.

Il risultato dipende dall'immagine di $S^1 \times \{\text{pt}\}$ in $H_1(T^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n-1}$.

Sia $M = \text{int}(N)$ iperbolica con cuspidi e ∂N unione di tori T^{n-1} .

Un *Dehn filling* è l'incollamento di un toro solido $D^2 \times T^{n-2}$ su uno di questi tori tramite diffeomorfismo $S^1 \times T^{n-2} \rightarrow T^{n-1}$.

Il risultato dipende dall'immagine di $S^1 \times \{\text{pt}\}$ in $H_1(T^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n-1}$.

Teorema (Anderson - Bamler)

Se si riempiono tutti i tori con immagini di S^1 sufficientemente complicate, si ottiene una varietà di Einstein.