Geometria e topologia

Matematica II ciclo

Bruno Martelli

Università di Pisa

20.01.2022

Albert Einstein, 1904

Albert Einstein, 1904

Annus mirabilis, 1905. Einstein scrive quattro articoli:

Albert Einstein, 1904

Annus mirabilis, 1905. Einstein scrive quattro articoli:

effetto fotoelettrico,

Albert Einstein, 1904

Annus mirabilis, 1905. Einstein scrive quattro articoli:

effetto fotoelettrico, moto Browniano,

Albert Einstein, 1904

Annus mirabilis, 1905. Einstein scrive quattro articoli:

effetto fotoelettrico, moto Browniano, relatività speciale,

Albert Einstein, 1904

Annus mirabilis, 1905. Einstein scrive quattro articoli:

effetto fotoelettrico, moto Browniano, relatività speciale, equivalenza massa-energia

1915. Einstein pubblica la *Teoria della relatività generale*.

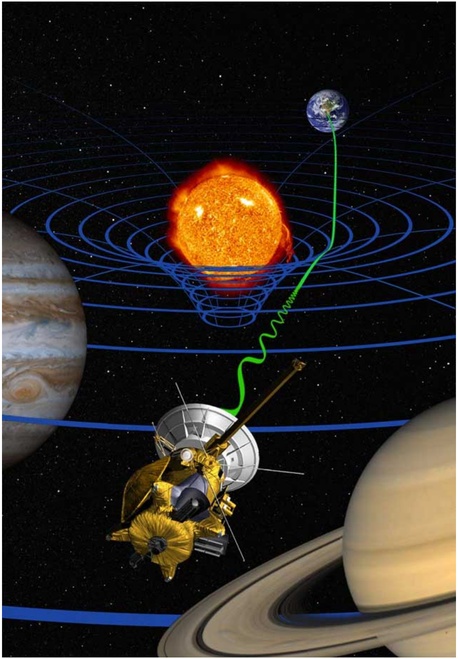
1915. Einstein pubblica la *Teoria della relatività generale*.

$$E = mc^2$$

1915. Einstein pubblica la *Teoria della relatività generale*.

$$E = mc^2$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



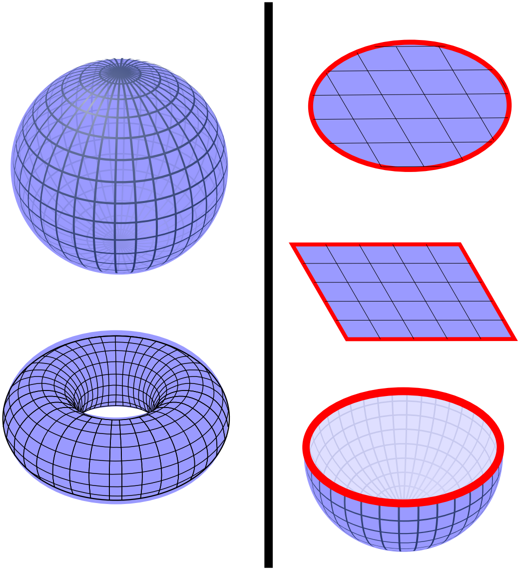
Spazio con n dimensioni

Spazio con n dimensioni

Crucifixión, o *Corpus hypercubus*, Salvador Dalí, 1954

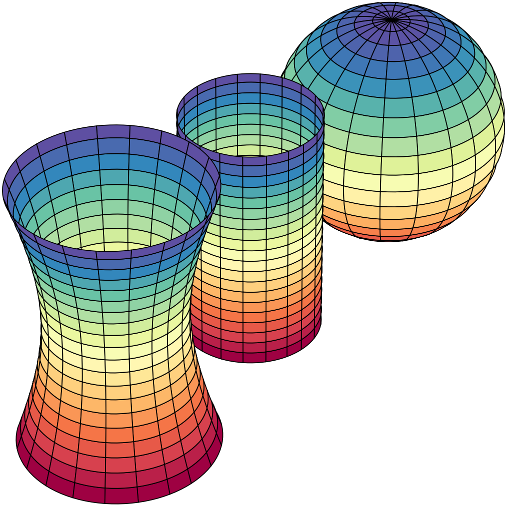
Topologia

Topologia



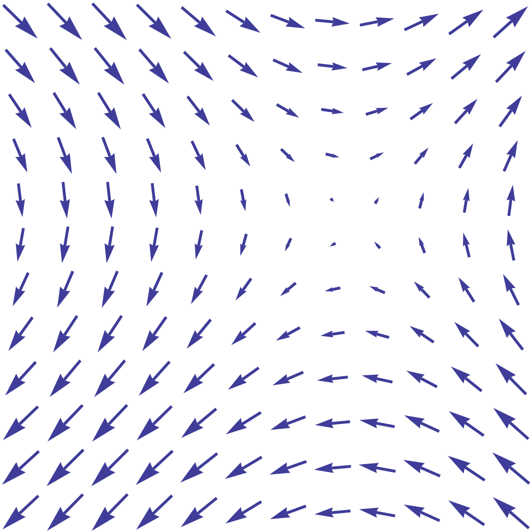
Curvatura

Curvatura



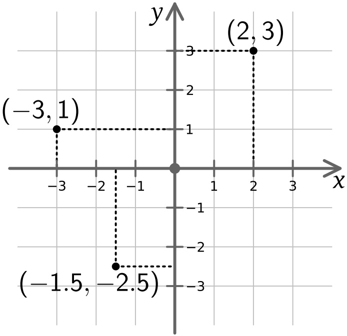
Campi tensoriali

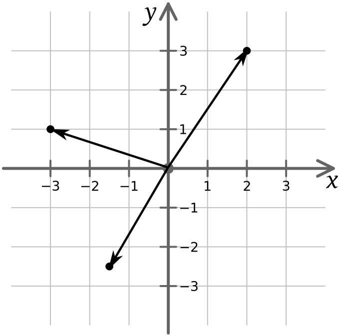
Campi tensoriali



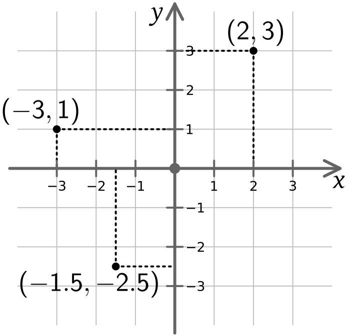
Spazio con n dimensioni

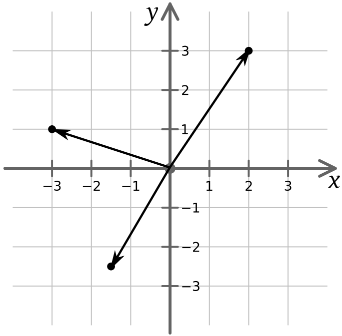
Spazio con n dimensioni





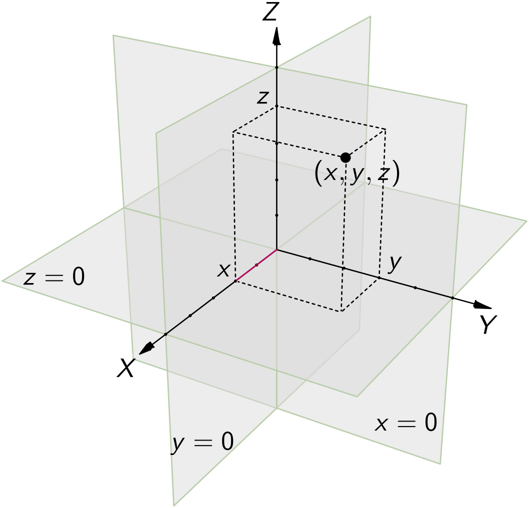
Spazio con n dimensioni





L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite,
la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.

Sophie Germain


Z
z
(x, y, z)
x
y
z = 0
Y
X
x = 0
y = 0

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

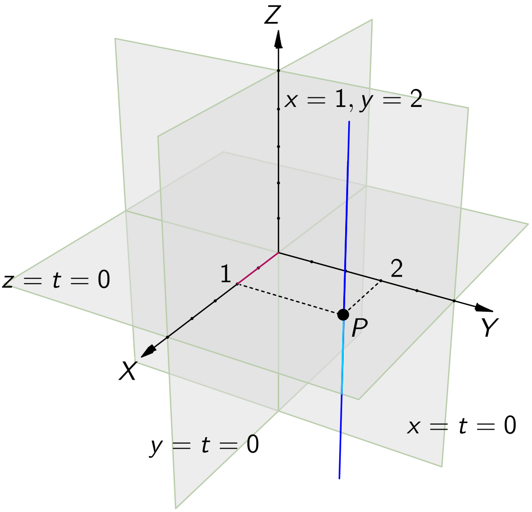
$$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

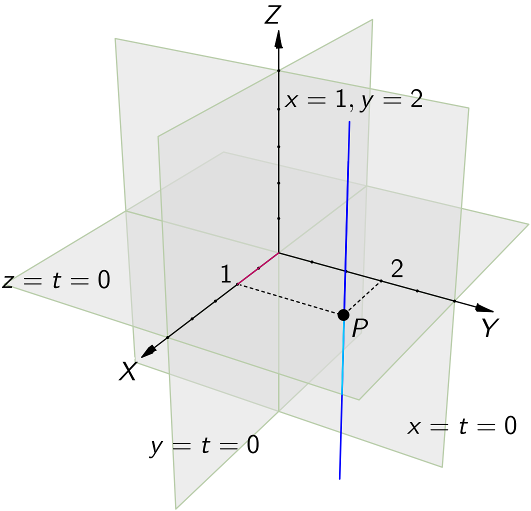
$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

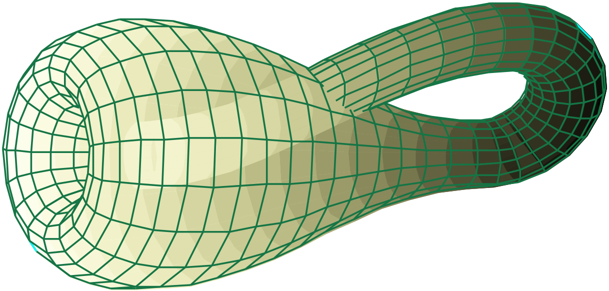


Z
x = 1, y = 2
1
2
z = t = 0
P
Y
X
x = t = 0
y = t = 0



$$P = (1, 2, 0, 0)$$

Bottiglia di Klein



Circonferenza: $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$

Circonferenza: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Sfera: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Circonferenza: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Sfera: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Sfera 3-dimensionale:

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

Circonferenza: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Sfera: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Sfera 3-dimensionale:

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

Sfera n-dimensionale:

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Segmento: $[-1,1]=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 1\}$.

Segmento: $[-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Quadrato:

$$[-1,1]^2 = [-1,1] \times [-1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Segmento: $[-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Quadrato:

$$[-1,1]^2 = [-1,1] \times [-1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Cubo:

$$[-1,1]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Segmento: $[-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Quadrato:

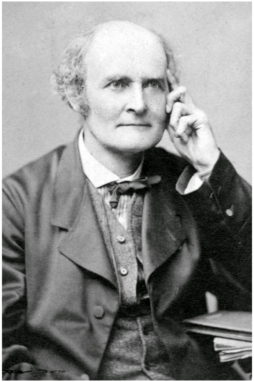
$$[-1,1]^2 = [-1,1] \times [-1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1\}.$$

Cubo:

$$[-1,1]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

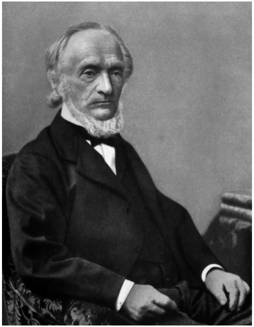
Ipercubo:

$$[-1,1]^4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leq x, y, z, t \leq 1\}.$$

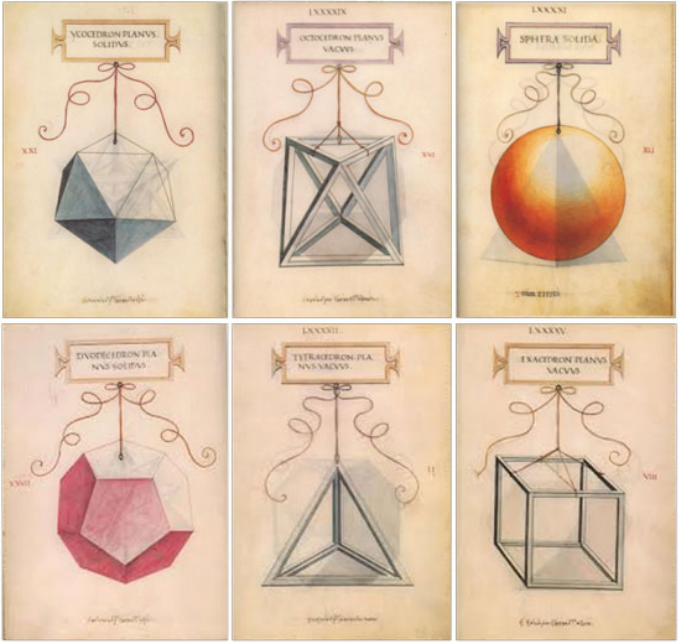


Arthur Cayley

Bernhard Riemann

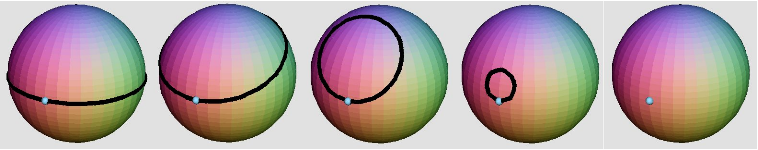


Ludwig Schläfli

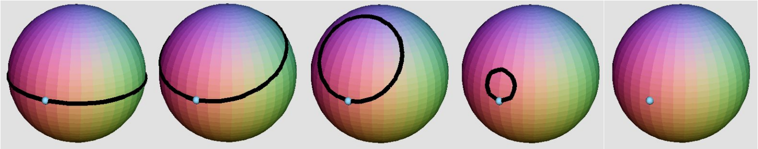

YCOCEDRON PLANVS SOLIDVS
OCTOCEDRON PLANVS VACVVS
SPHERA SOLIDA
DVODECEDRON PLA NVS SOLIDVS
TETRACEDRON PLA NVS VACVVS
EXACEDRON PLANVS VACVVS

Topologia

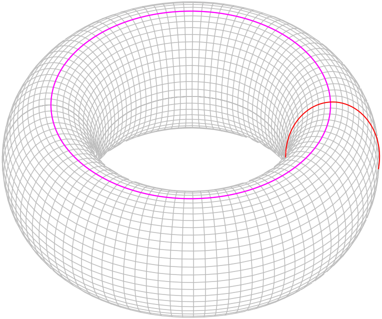
Topologia



semplicemente connesso

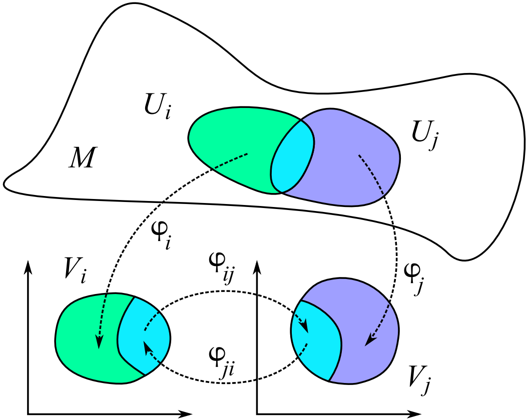


semplicemente connesso

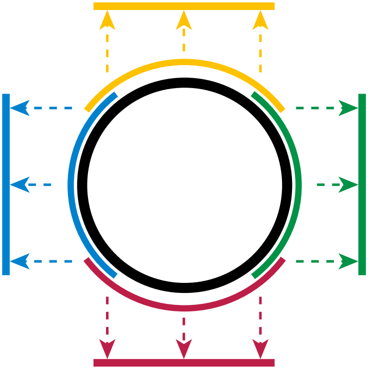


ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

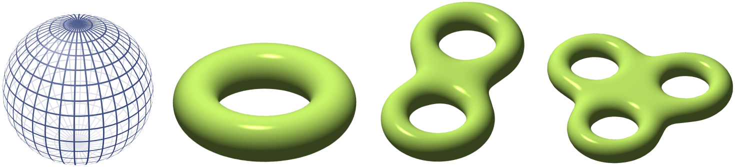
Varietà (*Manifold*)



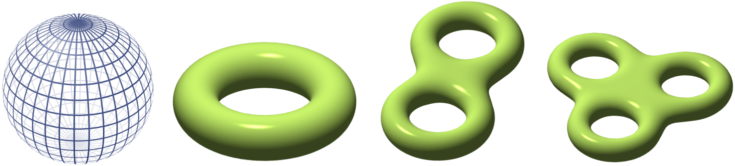
Whitney 1936: Una *varietà n-dimensionale* è uno spazio topologico M dotato di un *atlante* $\mathcal{A} = \left\{\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n\right\}$ formato da *carte* φ_i tali che le *funzioni di transizione* φ_{ij} siano *lisce* (cioè C^∞).



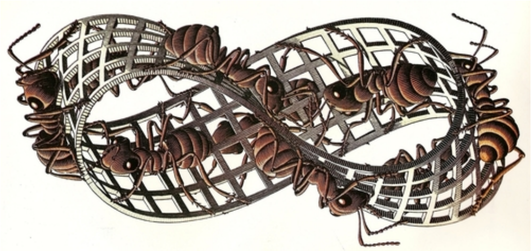
Una varietà di dimensione 2 è una *superficie*:



Una varietà di dimensione 2 è una *superficie*:

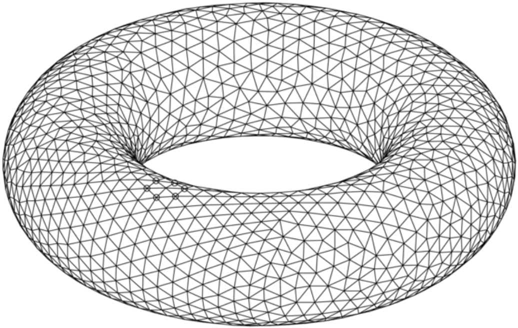


Una superficie può non essere *orientabile*:

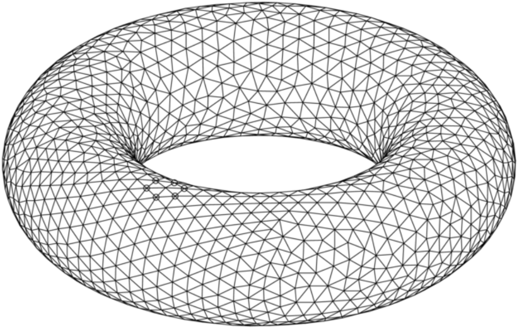


Triangolazione

Triangolazione

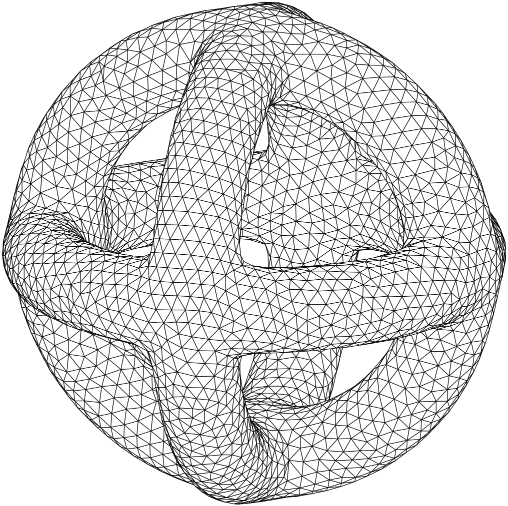


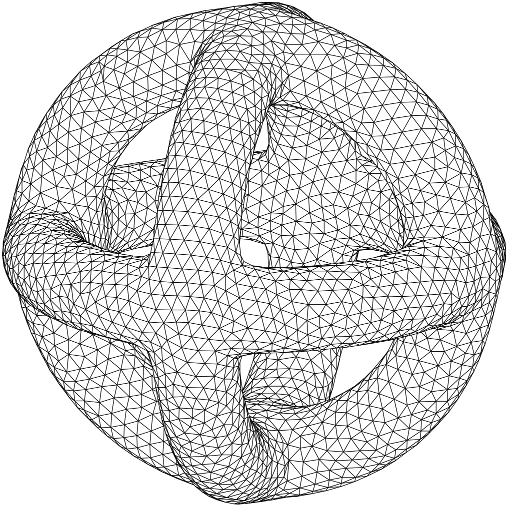
Triangolazione



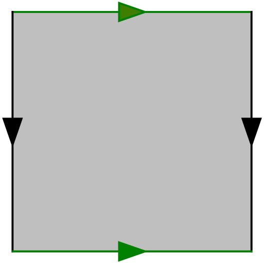
Caratteristica di Eulero – Poincaré

$$\chi = V - S + F = 2 - 2g = 0$$

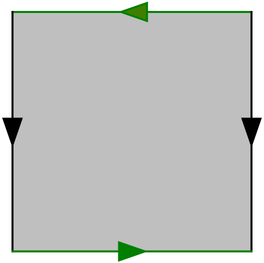




$$\chi = V - S + F = -12 \text{ ?}$$

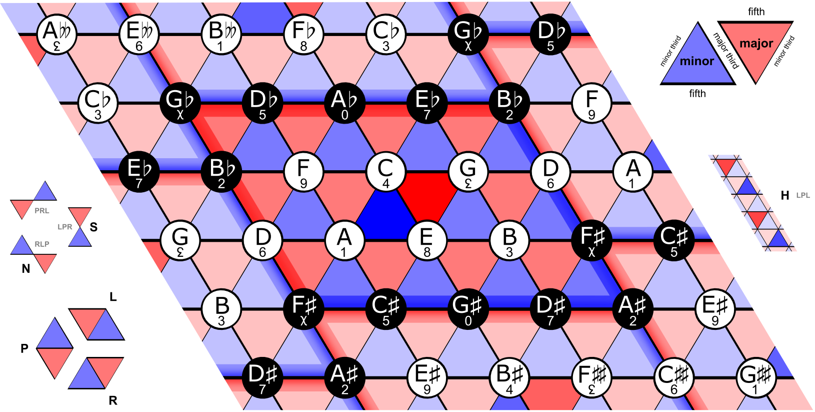


Toro



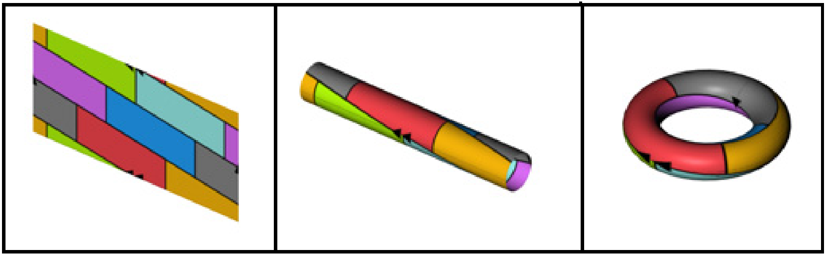
Klein

Note e accordi



Teorema dei 4 colori?

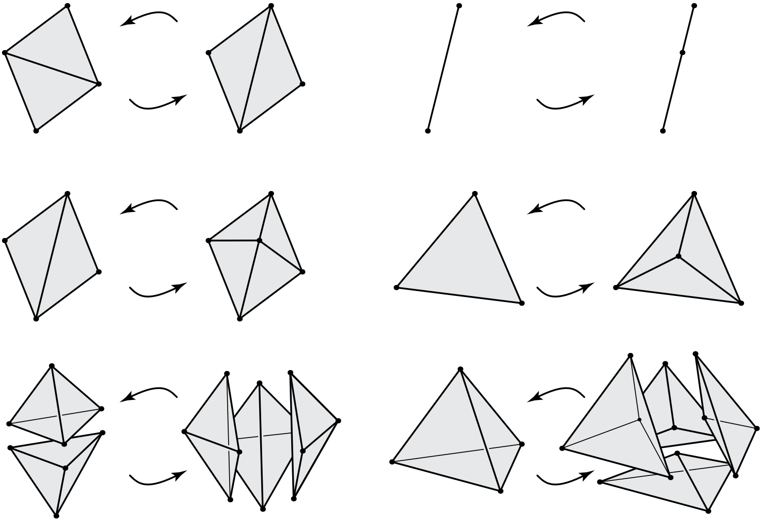
Teorema dei 4 colori?



Non è vero sul toro

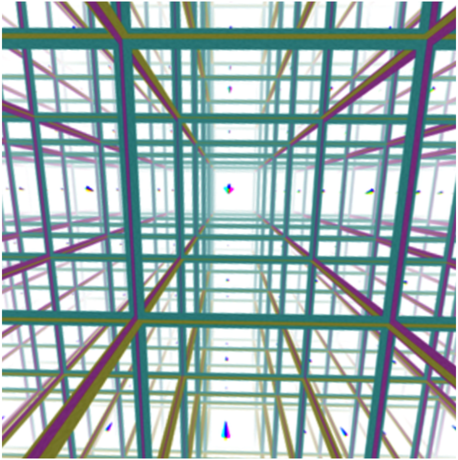
Mosse che modificano una triangolazione

Mosse che modificano una triangolazione



Toro 3-dimensionale

Toro 3-dimensionale



geometrygames.org

Congettura di Poincaré (1904)

L'unica varietà 3-dimensionale compatta e semplicemente connessa è la sfera.

William Thurston (1946–2012)

William Thurston (1946–2012)

Grigori Perelman (1966)

Tensori

Tensori

V spazio vettoriale di dimensione n

V spazio vettoriale di dimensione n

Definizione

Un tensore di tipo $(0,0)$ è uno scalare, cioè un numero reale.

V spazio vettoriale di dimensione n

Definizione

Un tensore di tipo $(0, 0)$ è uno scalare, cioè un numero reale.
Un tensore di tipo $(1, 0)$ è un vettore, cioè un elemento di V.

V spazio vettoriale di dimensione n

Definizione

Un tensore di tipo $(0,0)$ è uno scalare, cioè un numero reale.
Un tensore di tipo $(1,0)$ è un vettore, cioè un elemento di V.
Un tensore di tipo $(0,1)$ è una funzione lineare $V \to \mathbb{R}$.

V spazio vettoriale di dimensione n

Definizione

Un tensore di tipo $(0,0)$ è uno scalare, cioè un numero reale.
Un tensore di tipo $(1,0)$ è un vettore, cioè un elemento di V.
Un tensore di tipo $(0,1)$ è una funzione lineare $V \to \mathbb{R}$.
Un tensore di tipo $(0,k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

V spazio vettoriale di dimensione n

Definizione

Un tensore di tipo $(0,0)$ è uno scalare, cioè un numero reale.
Un tensore di tipo $(1,0)$ è un vettore, cioè un elemento di V.
Un tensore di tipo $(0,1)$ è una funzione lineare $V \to \mathbb{R}$.
Un tensore di tipo $(0,k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esempio

Il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ è un tensore di tipo $(0,2)$.

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Definizione

Un tensore di tipo $(1, k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow V$$

Definizione

Un tensore di tipo $(1, k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow V$$

Esempio

Un tensore di tipo $(1, 1)$ è un endomorfismo di V.

Definizione

Un tensore di tipo $(1, k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow V$$

Esempio

Un tensore di tipo $(1, 1)$ è un endomorfismo di V. Ad esempio le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$ come rotazioni, simmetrie, omotetie ...

Definizione

Un tensore di tipo $(1, k)$ è una funzione multilineare

$$T\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow V$$

Esempio

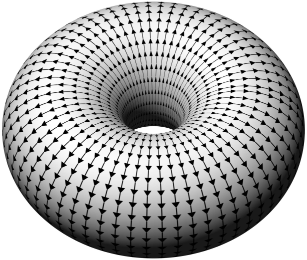
Un tensore di tipo $(1, 1)$ è un endomorfismo di V. Ad esempio le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$ come rotazioni, simmetrie, omotetie ...

Esempio

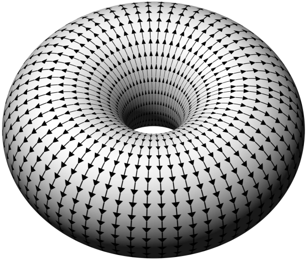
Il *prodotto vettoriale* in $\mathbb{R}^3$ è un tensore di tipo $(1, 2)$.

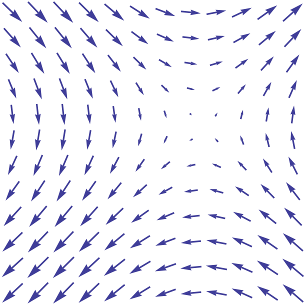
Campo vettoriale

Campo vettoriale



Campo vettoriale





Tensore metrico

Tensore metrico

Definizione

Un *tensore metrico* su una varietà M è un campo tensoriale che è in ogni punto un prodotto scalare non degenere.

Definizione

Un *tensore metrico* su una varietà M è un campo tensoriale che è in ogni punto un prodotto scalare non degenere.

Esempio (Spazio Euclideo)

Su $\mathbb{R}^3$ in ogni punto p usiamo il prodotto scalare usuale

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w.$$

Definizione

Un *tensore metrico* su una varietà M è un campo tensoriale che è in ogni punto un prodotto scalare non degenere.

Esempio (Spazio Euclideo)

Su $\mathbb{R}^3$ in ogni punto p usiamo il prodotto scalare usuale

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w.$$

Esempio (Spazio di Minkowski)

Su $\mathbb{R}^4$ in ogni punto p usiamo il prodotto scalare Lorentziano

$$\langle v, w\rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4 = v^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w.$$

Definizione

Una *varietà Riemanniana* è una n-varietà dotata di un tensore metrico definito positivo.

Definizione

Una *varietà Riemanniana* è una n-varietà dotata di un tensore metrico definito positivo.

Definizione

Una *varietà Lorentziana* è una n-varietà dotata di un tensore metrico di segnatura $(n-1, 1)$.

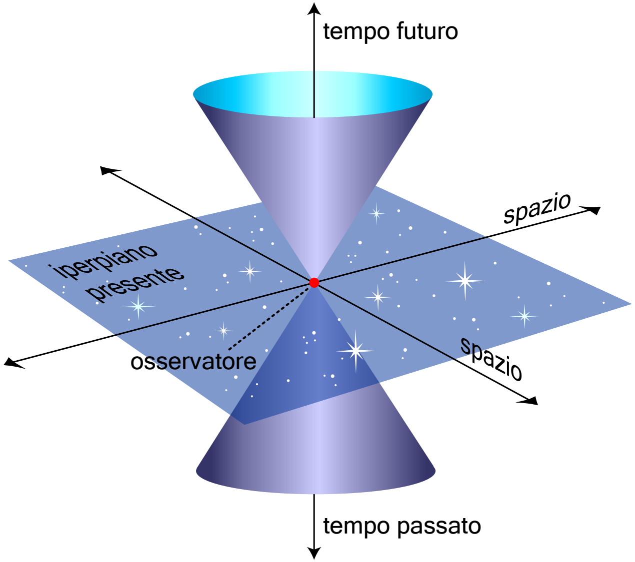
Definizione

Una *varietà Riemanniana* è una n-varietà dotata di un tensore metrico definito positivo.

Definizione

Una *varietà Lorentziana* è una n-varietà dotata di un tensore metrico di segnatura $(n-1, 1)$.

Secondo la relatività generale, lo spaziotempo è una varietà Lorentziana di dimensione 4.


tempo futuro
spazio
iperpiano
presente
spazio
osservatore
tempo passato

Con il tensore metrico possiamo definire molte nozioni geometriche su una varietà M:

Con il tensore metrico possiamo definire molte nozioni geometriche su una varietà M:

- Lunghezze di vettori e di curve, distanza fra punti (nel caso Riemanniano)

Con il tensore metrico possiamo definire molte nozioni geometriche su una varietà M:

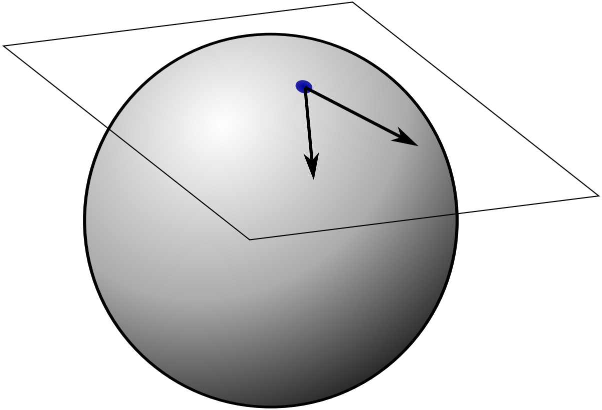
- Lunghezze di vettori e di curve, distanza fra punti (nel caso Riemanniano)
- Volumi di zone di M

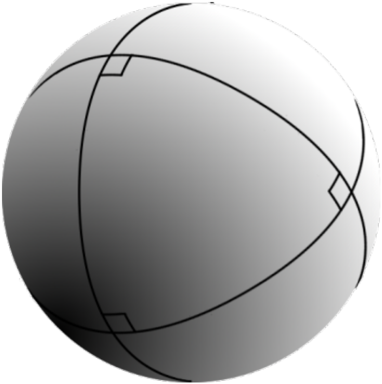
Con il tensore metrico possiamo definire molte nozioni geometriche su una varietà M:

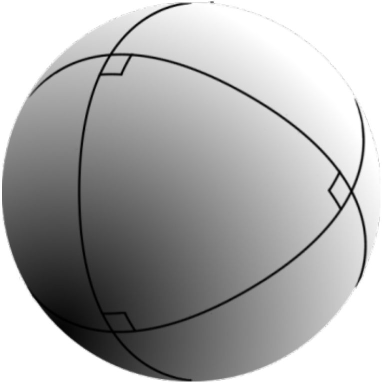
- Lunghezze di vettori e di curve, distanza fra punti (nel caso Riemanniano)
- Volumi di zone di M
- Connessione di Levi–Civita $\longrightarrow$ geodetiche

Con il tensore metrico possiamo definire molte nozioni geometriche su una varietà M:

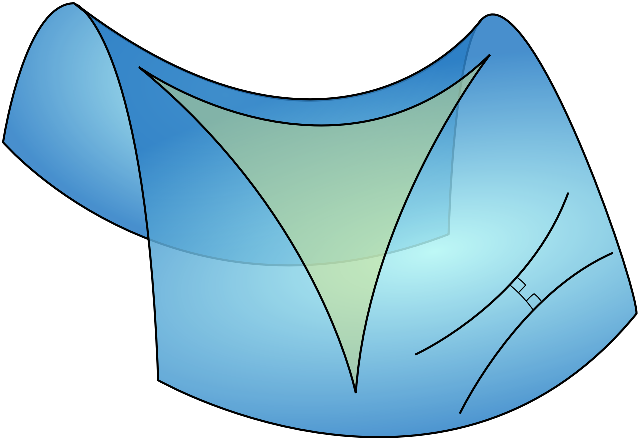
- Lunghezze di vettori e di curve, distanza fra punti (nel caso Riemanniano)
- Volumi di zone di M
- Connessione di Levi–Civita $\longrightarrow$ geodetiche
- Curvatura



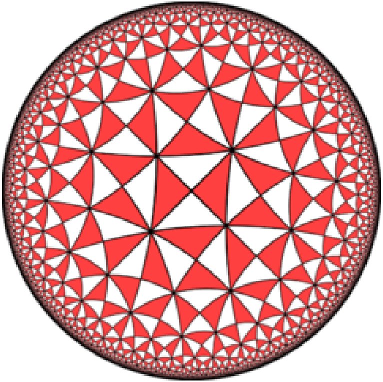




Area $= \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} =$ differenza fra somma degli angoli e π

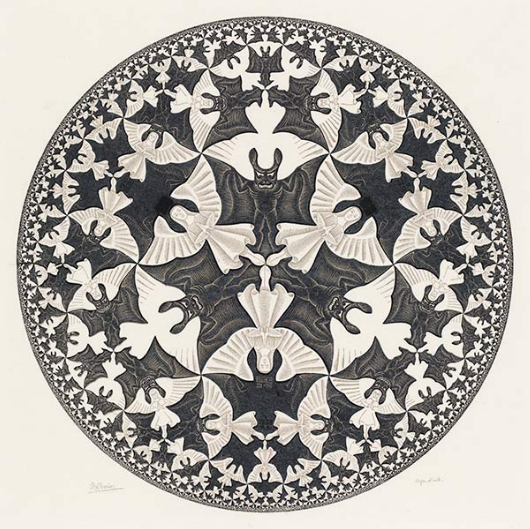


Piano iperbolico

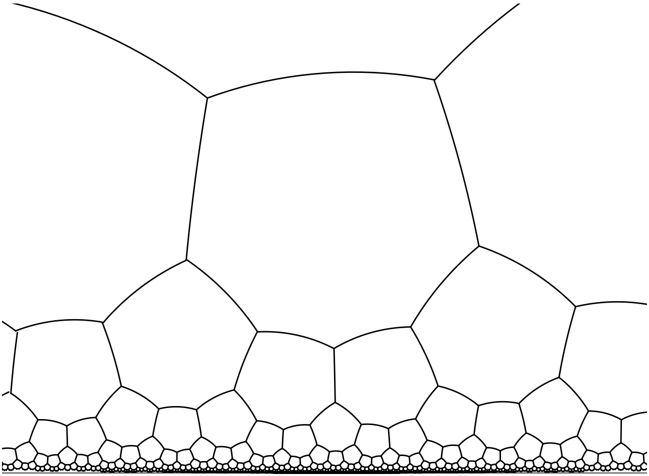


Il tensore metrico nel punto x del disco è riscalato di un fattore

$$\left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right)^2$$



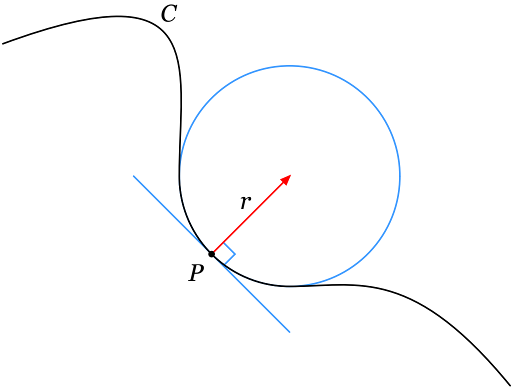
Cerchio limite IV (Paradiso e inferno), Escher, 1960



Il tensore metrico nel punto x è riscalato del fattore $\frac{1}{x_n^2}$.

Curvatura di una curva nel piano

Curvatura di una curva nel piano

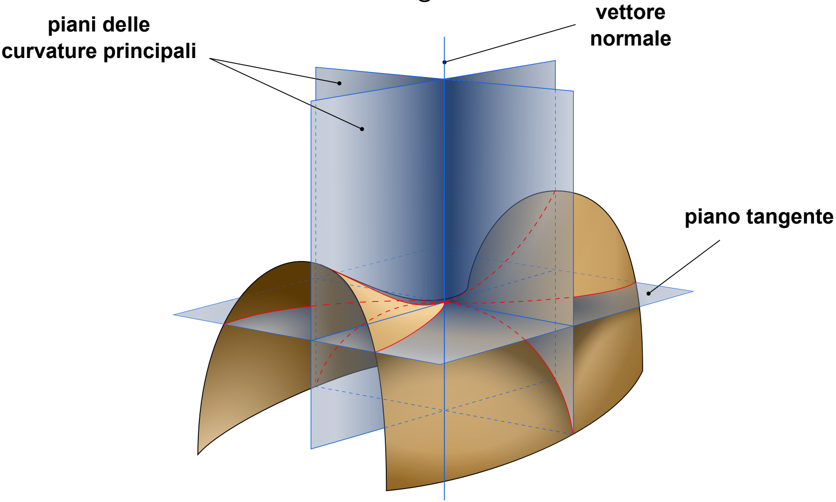


Raggio di curvatura: r

Curvatura: $k = 1/r$

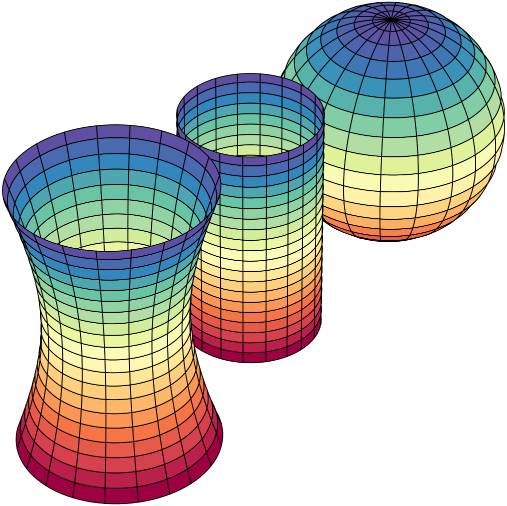
Curvatura gaussiana

Curvatura gaussiana



$$K = k_1 \cdot k_2$$

Superfici di curvatura negativa, nulla e positiva:



Teorema (Teorema Egregium di Gauss)

La curvatura dipende solo dal tensore metrico sulla superficie.

Teorema (Teorema Egregium di Gauss)

La curvatura dipende solo dal tensore metrico sulla superficie.

Più informalmente: la curvatura non cambia se pieghiamo una superficie senza creare strappi.

Teorema (Teorema Egregium di Gauss)

La curvatura dipende solo dal tensore metrico sulla superficie.

Più informalmente: la curvatura non cambia se pieghiamo una superficie senza creare strappi.

Conseguenze:

- In qualsiasi carta geografica ci sono distorsioni.

Teorema (Teorema Egregium di Gauss)

La curvatura dipende solo dal tensore metrico sulla superficie.

Più informalmente: la curvatura non cambia se pieghiamo una superficie senza creare strappi.

Conseguenze:

- In qualsiasi carta geografica ci sono distorsioni.
- Si può mangiare un quarto di pizza con le mani.

La curvatura gaussiana può essere definita in modo intrinseco per qualsiasi superficie astratta

La curvatura gaussiana può essere definita in modo intrinseco per qualsiasi superficie astratta

Area cerchio di raggio r: $\pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} K + \mathrm{O}(r^4)$.

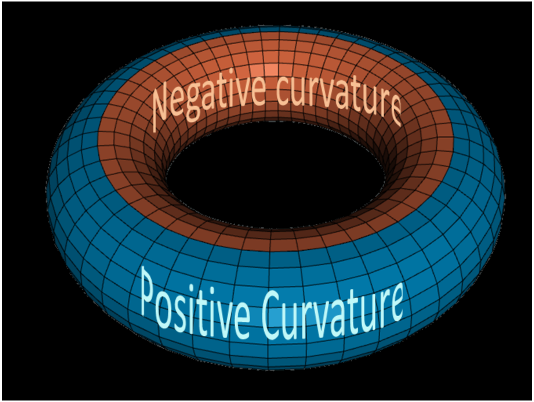
La curvatura gaussiana può essere definita in modo intrinseco per qualsiasi superficie astratta

Area cerchio di raggio r: $\qquad \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} K + \mathrm{O}(r^4).$

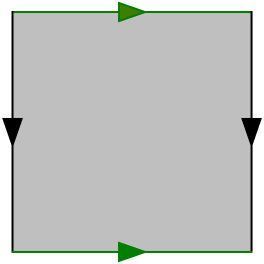
Il cerchio di raggio r nel piano iperbolico ha area

$$\begin{aligned} 4\pi \sinh^2(r/2) &= \pi(e^{r/2} - e^{-r/2})^2 = \pi(e^r - 2 + e^{-r}) \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + o(r^4) \right) = \pi r^2 + \frac{\pi r^4}{12} + o(r^4) \end{aligned}$$

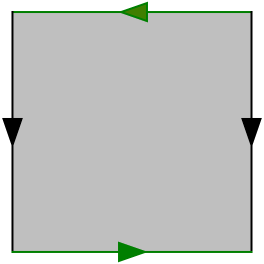
Il toro nello spazio ha punti con curvatura variabile:



In questa versione il toro e la bottiglia di Klein hanno tutti i punti con curvatura nulla:



Toro



Klein

Teorema (Gauss – Bonnet)

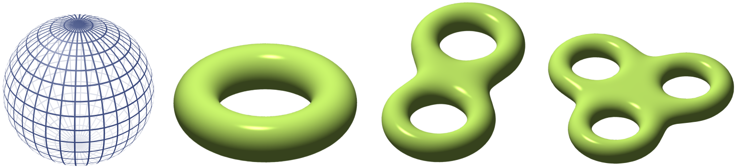
Per qualsiasi superficie compatta S senza bordo vale l'uguaglianza

$$\int_S K = 2\pi\chi(S).$$

Teorema (Gauss – Bonnet)

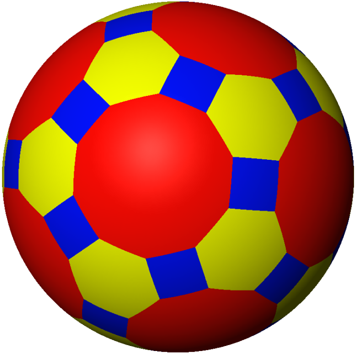
Per qualsiasi superficie compatta S senza bordo vale l'uguaglianza

$$\int_S K = 2\pi\chi(S).$$



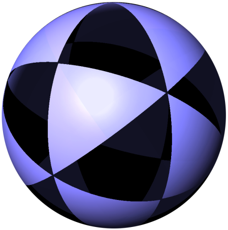
$\chi = 2$ 0 -2 -4

Tassellazioni

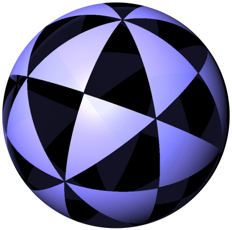


Tassellazioni con triangoli aventi angoli interni $\pi/p, \pi/q, \pi/r$:

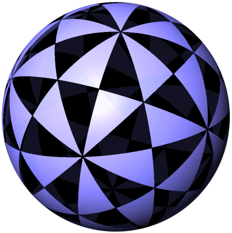
Tassellazioni con triangoli aventi angoli interni $\pi/p, \pi/q, \pi/r$:



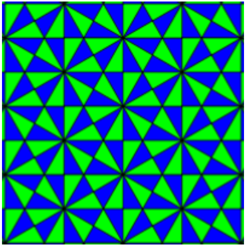
$(p, q, r) = (2, 3, 3)$



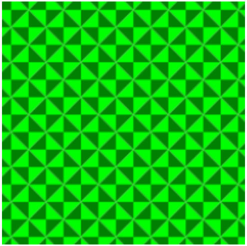
$(2, 3, 4)$



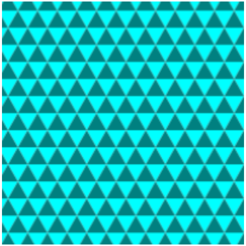
$(2, 3, 5)$



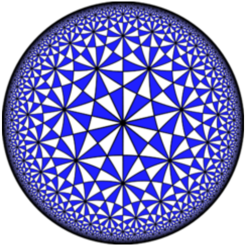
$(2, 3, 6)$



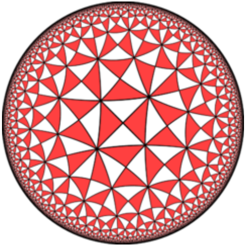
$(2, 4, 4)$



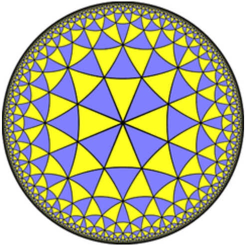
$(3, 3, 3)$



$(2, 3, 7)$

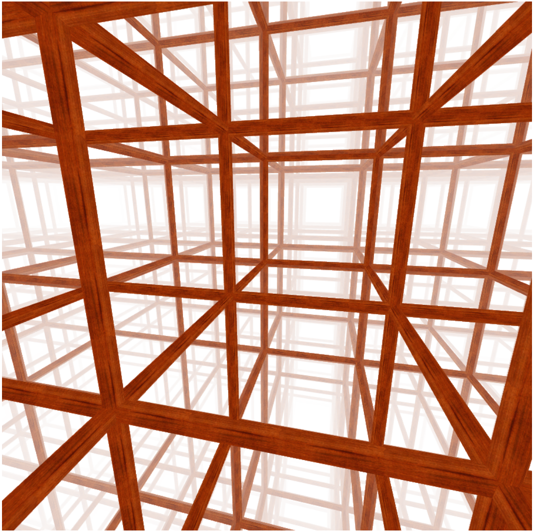


$(2, 4, 5)$

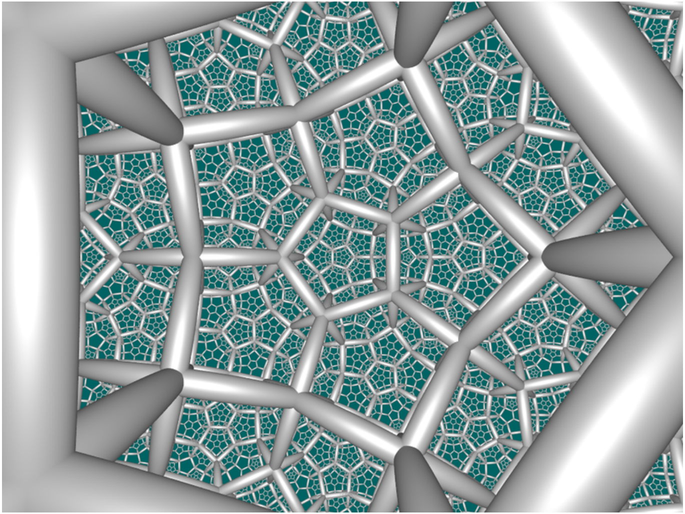


$(3, 3, 4)$

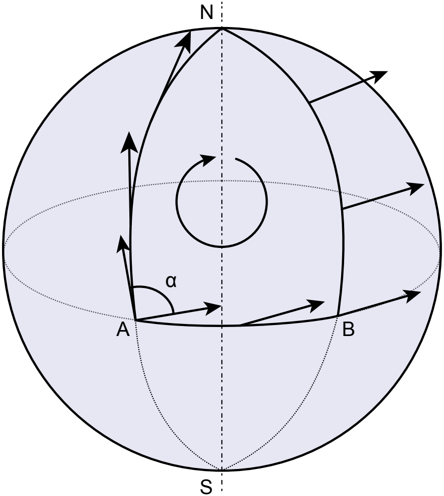
Tassellazione dello spazio in cubi



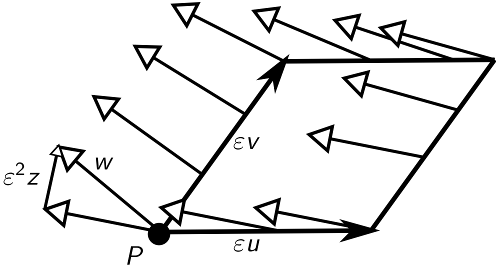
Tassellazione dello spazio iperbolico in dodecaedri retti



Trasporto parallelo (connessione)



Tensore di Riemann di tipo $(3, 1)$



$$R(u, v, w) = z$$

Teorema (Uniformizzazione di Poincaré – Koebe)

Ogni superficie compatta ha una metrica Riemanniana a curvatura costante 1, 0 *oppure* -1. *In altre parole localmente ha la geometria della sfera, del piano euclideo, o del piano iperbolico.*

Teorema (Uniformizzazione di Poincaré – Koebe)

Ogni superficie compatta ha una metrica Riemanniana a curvatura costante 1, 0 *oppure* -1. *In altre parole localmente ha la geometria della sfera, del piano euclideo, o del piano iperbolico.*

Teorema (Geometrizzazione di Thurston – Perelman)

Ogni 3-varietà compatta orientabile si decompone in pezzi, ciascuno dei quali ha una metrica Riemanniana che ha localmente uno di 8 tipi fissati di geometrie.

Teorema (Uniformizzazione di Poincaré – Koebe)

Ogni superficie compatta ha una metrica Riemanniana a curvatura costante 1, 0 *oppure* -1. *In altre parole localmente ha la geometria della sfera, del piano euclideo, o del piano iperbolico.*

Teorema (Geometrizzazione di Thurston – Perelman)

Ogni 3-varietà compatta orientabile si decompone in pezzi, ciascuno dei quali ha una metrica Riemanniana che ha localmente uno di 8 tipi fissati di geometrie.

Corollario (Congettura di Poincaré)

Una 3-varietà compatta semplicemente connessa è una sfera.