ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2022/23 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 4 marzo

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Sia $f\colon M \to N$ un omeomorfismo fra varietà lisce che è anche un diffeomorfismo locale. Mostra che f è un diffeomorfismo. Deduci che le due definizioni seguenti di rivestimento liscio sono equivalenti: una funzione liscia $f\colon M \to N$ fra varietà lisce è un *rivestimento liscio* se

(1) ogni punto $x \in N$ ha un intorno aperto U tale che
$$p^{-1}(U) = \sqcup_{i\in I} U_i$$
e la restrizione $\pi|_{U_i}\colon U_i \to U$ è un diffeomorfismo;

(2) è un rivestimento topologico e un diffeomorfismo locale.

Esercizio 1.3. Dimostra rigorosamente che la mappa costruita a lezione fra $\mathbb{RP}^1$ e S^1 è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.4. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa
$$p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S)$$
$$z \longmapsto p(z)$$
è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da
$$f(x, y) = (x + 1, y), \qquad g(x, y) = (-x, y + 1).$$
Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo e che il quadrato Q di vertici $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ è un dominio fondamentale.

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da
$$f(x, y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$
Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed

il quoziente $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.7. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x,y,z) = (x+1,y,z), \qquad g(x,y,z) = (x,y+1,z),$$
$$h(x,y,z) = (-x,-y,z+1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile (aspetta mercoledì 9 marzo per la definizione) ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

2. Esercizi dell'11 marzo

Esercizio 2.1. Sia $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione $i\colon S \hookrightarrow M$ è un embedding. Mostra che i è propria se e solo se S è un sottoinsieme chiuso.

Esercizio 2.2. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$

è una immersione iniettiva e che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.3. Un *nodo* è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ diffeomorfa a S^1. Ricorda che $\mathbb{RP}^2$ è interpretabile come l'insieme delle rette vettoriali in $\mathbb{R}^3$. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, mostra che:

(1) La funzione $f\colon K \to \mathbb{RP}^2$, $p \mapsto T_pK$ è liscia.
(2) Esiste un piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la proiezione ortogonale $\pi\colon K \to W$ sia una immersione.

Esercizio 2.4. Mostra che la fibrazione di Hopf $S^3 \to S^2$ definita a lezione è una sommersione.

Esercizio 2.5. Sia $f\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x,y,z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2-y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.6. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in $\mathbb{R}^n$, per qualche n.

Esercizio 2.7. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 18 marzo

Indichiamo con $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni multilineari da $V_1, \ldots, V_k$ in W.

Esercizio 3.1. Mostra che l'isomorfismo canonico

$$\mathrm{Mult}(\underbrace{V, \ldots, V}_{k}; V) \longrightarrow \mathrm{Mult}(V^*, \underbrace{V, \ldots, V}_{k}; \mathbb{R}) = \mathcal{T}_1^k(V)$$

definito mandando $F \in \mathrm{Mult}(V, \ldots, V; V)$ nella mappa

$$(w^*, v_1, \ldots, v_k) \longmapsto w^*\big(F(v_1, \ldots, v_k)\big)$$

è effettivamente un isomorfismo.

Esercizio 3.2. Siano U, V, W spazi vettoriali. Mostra che esiste un isomorfismo canonico tra gli spazi vettoriali

$$\mathrm{Mult}(U, V; W), \qquad \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Un elemento di $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^*, in qualche ordine.

Esercizio 3.3. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

(1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.

(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.4. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.5. Siano $v^1, \ldots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \cdots \wedge v^k \neq 0$.

Esercizio 3.6. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)\big) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.7. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \left\{ (l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; v \in l \right\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

4. Esercizi del 25 marzo

Esercizio 4.1. Mostra che il fibrato tangente TK della bottiglia di Klein K ha una sezione mai nulla ma non ha due sezioni indipendenti.

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.4. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \to \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.5. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \to M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

Esercizio 4.6. Costruisci una fibrazione $E \to K$ con fibra $F = S^1$ sopra la bottiglia di Klein K, tale che E sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

Esercizio 4.7. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n + 1$.

5. Esercizi del 1 aprile

Esercizio 5.1. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 5.2. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 5.3. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 5.4. Dimostra che ogni 4-varietà omeomorfa a S^4 è anche diffeomorfa a S^4.

Esercizio 5.5. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia contemporaneamente foglie compatte e non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).

Esercizio 5.6. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di SO(3) sono l'identità, SO(3), e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 5.7. Sia D una distribuzione di rango k su una varietà M. Mostra che D è integrabile se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $p \in M$ esiste una sottovarietà $S \subset M$ di dimensione k contenente p tale che per ogni $q \in S$ vale $T_qS = D_q$.

6. Esercizi dell' 8 aprile

Esercizio 6.1. Siano M e N due varietà connesse orientate senza bordo di dimensione $n \geq 3$. Mostra che

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove $\#$ indica la somma connessa di varietà e $*$ il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

Esercizio 6.2. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\iff$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 6.3. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 6.4. Sia $f\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 6.5. Sia N una m-varietà senza bordo. Se $\varphi\colon M \to N$ è una mappa liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 6.6. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su M chiusa (cioè tale che $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M.

Esercizio 6.7. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\iff$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

7. Esercizi del 22 aprile

Esercizio 7.1. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 7.2. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Esercizio 7.3. Calcola i numeri di Betti della superficie ottenuta togliendo k punti a S^2.

Esercizio 7.4. Calcola i numeri di Betti della varietà M ottenuta da $\mathbb{R}^3$ rimuovendo gli assi x e y.

Esercizio 7.5. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 7.6. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 7.7. Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

8. Esercizi del 29 aprile

Esercizio 8.1. Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato con fibra F. Mostra che se il fibrato ha una sezione allora $\pi^*\colon H^k(M) \to H^k(E)$ è iniettivo. Deduci che la fibrazione di Hopf $S^3 \to S^2$ non ha sezioni.

Esercizio 8.2. Sia M una n-varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Sia $M\#N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} &b^i(M\#N) = 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ &b^i(M\#N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \qquad b^1(S_g) = 2g, \qquad b^2(S_g) = 1.$$

Esercizio 8.4. Dimostra il Lemma dei 5.

Esercizio 8.5. Sia $S \subset \mathbb{CP}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione complessa $k \leq n$. Mostra che la mappa $i^* \colon H^{2k}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k}(S)$ è un isomorfismo.

Esercizio 8.6. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 8.7. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

9. Esercizi del 6 maggio

Esercizio 9.1. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ.

Esercizio 9.2. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\big\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\mathrm{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n.

Esercizio 9.3. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 9.4. Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano H^2 definito nell'esercizio precedente.

Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t).

Esercizio 9.5. Costruisci delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili sia sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ che sul nastro di Möbius. È sufficiente un disegno che indichi i coni di luce e la breve descrizione di una strategia per costruire la metrica. (Questo esercizio mostra che orientabilità e tempo-orientabilità sono concetti indipendenti.)

Esercizio 9.6. Un *frame* su una varietà pseudo-Riemanniana M è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale $v_1, \ldots, v_n$ per T_pM. Mostra che le isometrie di $\mathbb{R}^{p,q}$, $S^{p,q}$ e $H^{p,q}$ agiscono transitivamente sui frame.

Esercizio 9.7. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

10. Esercizi del 13 maggio

Esercizio 10.1. Sia M una varietà pseudo-Riemanniana connessa. Sia $p \in M$ un punto. Il *gruppo di olonomia* di M in p è il sottoinsieme

$$H_p = \big\{\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\big\} \subset \mathrm{O}(T_pM, g(p))$$

ottenuto al variare di tutte le curve $\gamma \colon I \to M$ con $t_0 < t_1$ contenuti in I e tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$. Mostra che H_p è effettivamente un sottogruppo. Mostra che se $p, q \in M$ allora H_p e H_q sono isomorfi. Determina il tipo di isomorfismo di H_p per $M = \mathbb{R}^n$ e $M = S^2$.

Esercizio 10.2. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Esercizio 10.3. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g),

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$

Esercizio 10.4. Sia M una varietà dotata di una connessione ∇ e $\gamma\colon I \to M$ una curva. Mostra che il trasporto parallelo

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\colon T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

è invariante per riparametrizzzazione di γ. Cioè, se prendiamo una mappa suriettiva $\alpha\colon J \to I$ con $\alpha'(t) \geq 0$ per ogni $t \in J$, allora

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} = \Gamma(\gamma \circ \alpha)_{u_0}^{u_1}$$

per qualsiasi $u_0, u_1 \in J$ con $\alpha(u_i) = t_i$.

Esercizio 10.5. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q\rangle.$$

Esercizio 10.6 (Il toro di Clifton – Pohl)**.** Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria per questa metrica. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T. Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1 - t}, 0\right), \qquad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).

Esercizio 10.7. Una varietà riemanniana connessa è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M che porti p in q. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

11. Esercizi del 20 maggio

Una *isometria locale* fra varietà pseudo-Riemanniane è una $f\colon M \to N$ tale che per ogni $p \in M$ esistono intorni aperti $U(p)$ e $V(f(p))$ tali che $f(U) = V$ e $f|_U\colon U \to V$ sia un isometria.

Una varietà pseudo-Riemanniana M è *omogenea* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una isometria f di M tale che $f(p) = q$.

Esercizio 11.1. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 11.2. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff$ N è completa.

Esercizio 11.3. Una varietà riemanniana connessa è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 11.4. Sia M una varietà Riemanniana connessa completa. Un *raggio* uscente da $p \in M$ è una geodetica $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ con $\gamma(0) = p$ e $\|\gamma'(0)\| = 1$ tale che $d(\gamma(t), p) = t$ per ogni $t \in [0, +\infty)$. Mostra che se M è non compatta allora per ogni p esiste un raggio uscente da p.

Esercizio 11.5. Dimostra che il piano iperbolico nel modello del semipiano ha curvatura sezionale costante -1. Puoi dare per buono il calcolo dei Γ_{ij}^k. Deduci che lo spazio iperbolico di dimensione n ha curvatura sezionale costante -1.

Esercizio 11.6. Dimostra che S^n ha curvatura sezionale costante $+1$.

Esercizio 11.7. Sia $R > 0$. Considera la varietà $M = \mathbb{R} \times (R, +\infty) \times S^2$, con variabili t, r, θ, ϕ, dotata del tensore metrico lorentziano di Schwarzschild

$$g = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Mostra che il tensore di Ricci è nullo in ogni punto di M, ma il tensore di Riemann no.