

ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2018/19 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 2 marzo

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su \mathbb{R} . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe. (Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo può non essere vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Siano M e N due varietà topologiche e $f: M \rightarrow N$ un omeomorfismo. Data una struttura liscia su N , esiste un'unica struttura liscia su M tale che f sia un diffeomorfismo.

Esercizio 1.3. Siano M e N due varietà topologiche e $f: M \rightarrow N$ un omeomorfismo locale. Data una struttura liscia su N , esiste un'unica struttura liscia su M tale che f sia un diffeomorfismo locale.

Esercizio 1.4. Concludi la dimostrazione che la mappa $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow S^2$ costruita a lezione è un diffeomorfismo verificando che nella carta opportuna è del tipo

$$[z, 1] \mapsto \frac{1}{1 + 4|z|^2} (4\Re z, -4\Im z, 1 - 4|z|^2).$$

(Nota: il fattore 4 può scomparire se si cambia tipo di proiezione stereografica.)

Esercizio 1.5. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = (x + 1, y), \quad g(x, y) = (-x, y + 1).$$

Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo, e che il quadrato Q di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ è un dominio fondamentale.

Esercizio 1.7. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \frac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \rightarrow M/\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed

il quoziente M/Γ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^2 , ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.8. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z), \\ h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà \mathbb{R}^3/Γ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

2. Esercizi del 9 marzo

Esercizio 2.1. Mostra che una immersione iniettiva propria è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione $i: S \hookrightarrow M$ è un embedding. Mostra che i è propria se e solo se S è un sottoinsieme chiuso.

Esercizio 2.3. Sia $M \subset N$ una sottovarietà liscia e $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che $S \subset N$ è una sottovarietà liscia.

Esercizio 2.4. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.5. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t \longmapsto (e^{pit}, e^{qit})$$

è una immersione iniettiva e che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.6. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa fra varietà lisce. Mostra che

$$i: M \hookrightarrow M \times N, \quad p \longmapsto (p, f(p))$$

è un embedding.

Esercizio 2.7. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \rightarrow \mathbb{R}^k$ per nessun k .

Esercizio 2.8. Sia $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.9. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in \mathbb{R}^n , per qualche n .

Esercizio 2.10. Costruisci un embedding del toro n -dimensionale

$$S^1 \times \dots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 16 marzo

Esercizio 3.1. Mostra che l'isomorfismo canonico

$$\text{Mult}(V_1, \dots, V_k; W) \longrightarrow \text{Mult}(V_1, \dots, V_k, W^*)$$

definito mandando $F \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_k; W)$ nella mappa

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}^*) \longmapsto \mathbf{w}^*(F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k))$$

è effettivamente un isomorfismo.

Esercizio 3.2. Siano U, V, W spazi vettoriali. Mostra che esiste un isomorfismo canonico tra gli spazi vettoriali

$$\text{Mult}(U, V; W), \quad \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)).$$

Esercizio 3.3. Dimostra le relazioni seguenti in $V \otimes W$:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} + \mathbf{w}') = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}',$$

$$\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes (\lambda\mathbf{w}),$$

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ or } \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Esercizio 3.4. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ e $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ vettori non nulli.

- (1) Se \mathbf{v} e \mathbf{v}' sono indipendenti, allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}'$ lo sono.
- (2) Se inoltre anche \mathbf{w} e \mathbf{w}' sono indipendenti, allora

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}' \in V \otimes W$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.5. Considera l'isomorfismo canonico $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$. Mostra che tramite questo isomorfismo gli elementi puri sono mandati precisamente negli omomorfismi di rango ≤ 1 .

Esercizio 3.6. Sia g un prodotto scalare su V , che induce un prodotto scalare su ciascun spazio tensoriale $\mathcal{T}_h^k(V)$.

- (1) Se \mathcal{B} è una base ortonormale per V , allora anche la base indotta da \mathcal{B} per $\mathcal{T}_h^k(V)$ è ortonormale.
- (2) Se g è definito positivo su V , anche il prodotto scalare indotto su $\mathcal{T}_h^k(V)$ è definito positivo.

4. Esercizi del 23 marzo

Esercizio 4.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Dato un elemento $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Esercizio 4.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare. Siano $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k \in V^*$ covettori qualsiasi. Considera gli elementi seguenti in $\mathcal{T}^k(V)$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{v}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}^k, & \beta &= \mathbf{w}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{w}^k, \\ \gamma &= \mathbf{v}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^k, & \delta &= \mathbf{w}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{w}^k. \end{aligned}$$

Ricordiamo che il prodotto scalare su V ne induce uno in V^* e $\mathcal{T}^k(V)$. Dimostra che i loro prodotti scalari sono:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1 \rangle \dots \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k \rangle, \\ \langle \gamma, \delta \rangle &= k! \det \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j \rangle. \end{aligned}$$

Esercizio 4.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare. Questo induce un prodotto scalare \langle, \rangle su $\Lambda^k(V)$. Definiamo un nuovo prodotto scalare rinormalizzato

$$\langle \alpha, \beta \rangle_N = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \beta \rangle$$

su $\Lambda^k(V)$, per ogni k . In questo modo otteniamo (con le notazioni dell'esercizio precedente) l'uguaglianza più comoda:

$$\langle \gamma, \delta \rangle_N = \det \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j \rangle.$$

Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ il generatore determinato dal prodotto scalare su V . Nota che

$$\langle \omega, \omega \rangle_N = 1$$

con la nuova rinormalizzazione. L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_N \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa è ben definita.
 (2) Se $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ è una base positiva ortonormale per V^* , allora

$$*(\mathbf{v}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^k) = \mathbf{v}^{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}^n.$$

- (3) La mappa $*$ è una isometria (rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$).
 (4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

Esercizio 4.4. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in \mathbb{R}^{n+1} . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 4.5. Mostra che il fibrato tangente TK della bottiglia di Klein K ha una sezione mai nulla ma non ha un frame.

Esercizio 4.6. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.7. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.8. Costruisci un fibrato $E \rightarrow K$ con fibra $F = S^1$ sopra la bottiglia di Klein K , tale che E sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

Esercizio 4.9. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n+1$.

Esercizio 4.10. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \rightarrow \mathbb{R}^k$).

5. Esercizi del 30 marzo

Esercizio 5.1. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

Esercizio 5.2. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su \mathbb{R}^n dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 5.3. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 5.4. Sia X un campo vettoriale su una varietà M . Siano $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva integrale e $p \in M$ un punto tali che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = p$. Mostra che $X(p) = 0$.

Esercizio 5.5. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 5.6. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

Esercizio 5.7. Costruisci un campo vettoriale mai nullo su ciascun spazio lenticolare $L(p, q)$.

Esercizio 5.8. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia contemporaneamente foglie compatte e non compatte (non basta un disegno: descrivi la foliazione in modo rigoroso).

Esercizio 5.9. Sia G un gruppo di Lie e $H < G$ un sottogruppo. Mostra che le classi laterali sinistre di H formano una foliazione di G .

6. Esercizi del 6 aprile

Esercizio 6.1. Mostra che la mappa esponenziale $\exp: \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n)$ è suriettiva.

Esercizio 6.2. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $SO(3)$ sono l'identità, $SO(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 6.3. Sia D una distribuzione di rango k su una varietà M . Mostra che D è integrabile se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $p \in M$ esiste una sottovarietà $S \subset M$ di dimensione k contenente p tale che per ogni $q \in S$ vale $T_q S = D_q$.

Esercizio 6.4. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

Esercizio 6.5. Mostra che ciascuno spazio lenticolare $L(p, q)$ ammette una foliazione in cerchi (cioè una foliazione di rango 1 con foglie tutte compatte).

Esercizio 6.6. Considera $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Per ogni $p = (z_1, z_2) \in S^3$, prendiamo la retta complessa

$$r_p = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_2 = 0\}.$$

- (1) Mostra che $r_p \subset T_p S^3$. Quindi $\{r_p\}_{p \in S^3}$ è una distribuzione di rango due in S^3 , detta *distribuzione di Hopf*.
- (2) Questa distribuzione è integrabile?

Esercizio 6.7. Mostra che due embedding $f, g: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ sono sempre isotopi.

Esercizio 6.8. Sia M una varietà connessa. Sia $N \subset M$ una ipersuperficie connessa chiusa. Mostra che $M \setminus N$ ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi.

7. Esercizi del 13 aprile

Esercizio 7.1. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato. Mostra che una sottovarietà $S \subset E$ è immagine di una sezione \iff interseca trasversalmente ogni fibra in un punto.

Una proprietà P di una funzione liscia $f: M \rightarrow N$ è *stabile* se per ogni omotopia liscia $f_t: M \rightarrow N$, $t \in [0, 1]$, con $f_0 = f$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che tutte le funzioni f_t con $t < \varepsilon$ abbiano la proprietà P .

Esercizio 7.2. Sia M compatta e $f: M \rightarrow N$ una funzione liscia. Mostra che le seguenti sono proprietà stabili per f :

- f è una immersione,
- f è una sommersione,
- f è trasversa ad una fissata sottovarietà chiusa $W \subset N$.

Esercizio 7.3. Sia $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ un nodo (cioè un embedding liscio). Mostra che esiste un piano affine $P \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\pi \circ f: S^1 \hookrightarrow P$ sia un'immersione, dove π è la proiezione ortogonale su P .

La caratteristica di Eulero di una superficie S_g di genere g è $\chi(S_g) = 2 - 2g$. Questa può essere presa come una definizione.

Esercizio 7.4. Siano $g, g', d \geq 1$ qualsiasi. Mostra che se $\chi(S_g) = d\chi(S_{g'})$ allora esiste un rivestimento $S_g \rightarrow S_{g'}$ di grado d .

Esercizio 7.5. Siano M e N due varietà connesse orientate senza bordo di dimensione $n \geq 3$. Mostra che

$$\pi_1(M \# N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove $*$ indica il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

Esercizio 7.6. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1 . Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 7.7. Sia $f: U \rightarrow V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

8. Esercizi del 4 maggio

In questi esercizi M è sempre una n -varietà senza bordo.

Esercizio 8.1. Sia N una m -varietà senza bordo. Se $\varphi: M \rightarrow N$ è una mappa liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e \wedge . \square

Esercizio 8.2. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma chiusa su M mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p): T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M , univocamente determinata da ω .

Esercizio 8.3. Sia X un campo vettoriale su M e $\omega \in \Omega^k(M)$. Dimostra la formula di Cartan:

$$\mathcal{L}_X(\omega) = (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)(\omega).$$

Esercizio 8.4. Sia X un campo vettoriale su M . Mostra che la contrazione

$$\iota_X: \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

è l'unica applicazione lineare che soddisfa le proprietà seguenti per ogni k :

- (1) Se $k = 1$, allora $\iota_X(\omega) = \omega(X)$;
- (2) $\iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_X(\eta)$ per qualsiasi forme differenziali $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$.

Esercizio 8.5. Calcola i numeri di Betti della varietà M ottenuta da \mathbb{R}^3 rimuovendo gli assi x e y .

Esercizio 8.6. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 8.7. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

9. Esercizi dell'11 maggio

Esercizio 9.1. Sia M una n -varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Suggerimento. Usa Mayer – Vietoris con $M = U \cup V$, $U = N$, e V palla aperta contenente il punto rimosso. \square

Esercizio 9.2. Sia $M \# N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(M \# N) &= 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ b^i(M \# N) &= b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \quad b^1(S_g) = 2g, \quad b^2(S_g) = 1.$$

Esercizio 9.3. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 9.4. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 9.5. Siano M e N due varietà compatte con bordo e $\varphi: \partial M \rightarrow \partial N$ un diffeomorfismo. Sia W ottenuta incollando M con N via φ . Mostra che

$$\chi(W) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M).$$

Esercizio 9.6. Dimostra il Lemma dei 5.

Esercizio 9.7. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.8. Sia $\pi: E^{n+k} \rightarrow M^n$ un fibrato con fibra diffeomorfa a F^k . Supponi che M, E, F siano tutte compatte, orientabili e senza bordo. Mostra che se $s: M \rightarrow E$ è una sezione, allora $[s(M)]$ è un elemento non nullo in $H^k(E)$. Deduci che la fibrazione di Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ non ha sezioni.

Suggerimento. Usa la relazione fra \wedge e intersezione trasversa (che abbiamo enunciato e non dimostrato). \square

10. Esercizi del 18 maggio

Esercizio 10.1. Considera la varietà riemanniana seguente (è lo spazio iperbolico nel modello del semispazio):

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n :

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\text{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n .

Esercizio 10.2. Considera la varietà riemanniana dell'esercizio precedente in dimensione due:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2 .

Esercizio 10.3. Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano H^2 descritto nell'esercizio precedente.

Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Mostra che v_t fa un angolo t con l'asse delle ordinate. Deduci che γ non è una geodetica.

Esercizio 10.4. Determina i supporti delle geodetiche massimali in H^2 .

Esercizio 10.5. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ .

Esercizio 10.6. Considera la connessione ∇ su \mathbb{R}^3 con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g , ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

11. Esercizi del 25 maggio

Esercizio 11.1. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g) , dato da

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh(t/2)v = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}v.$$

Deduci che la mappa esponenziale $\exp_p: T_p\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo in qualsiasi punto $p \in \mathbb{H}^n$.

Suggerimento. Usa il fatto che g ha una simmetria sferica e quindi $O(n)$ è un gruppo di isometrie. Usa esercizi precedenti sulle isometrie. \square

Esercizio 11.2. Sia $f: M \rightarrow N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 11.3. Sia $f: M \rightarrow N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff N$ è completa.

Esercizio 11.4. Una varietà riemanniana è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M che porti p in q . Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 11.5. Una varietà riemanniana è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana connessa completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 11.6. Identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} e scriviamo il modello del semipiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$ sono tutte e sole le isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

12. Esercizi del 1 giugno

Esercizio 12.1. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico \mathbb{H}^n . Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q \rangle.$$

Esercizio 12.2. Un *frame* su una varietà riemanniana M è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale v_1, \dots, v_n per $T_p M$. Mostra che le isometrie di \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n agiscono transitivamente sui frame.

Esercizio 12.3. Sia G un gruppo di Lie. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G invariante a sinistra, cioè tale che $L_g: G \rightarrow G$ sia un'isometria per ogni $g \in G$.

Esercizio 12.4. Sia G un gruppo di Lie compatto. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G *biinvariante*, cioè tale che L_g e R_g siano entrambe isometrie per ogni $g \in G$.

Esercizio 12.5. Nell'Esercizio 11.6 abbiamo visto che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

definiscono tutte le isometrie (che preservano l'orientazione) del piano iperbolico nel modello H^2 del semipiano. Mostra che le trasformazioni in cui a, b, c, d sono quattro numeri interi tali che $ad - bc = 1$ formano un sottogruppo $\Gamma < \text{Isom}^+(H^2)$ che agisce in modo propriamente discontinuo su H^2 . Il gruppo Γ agisce in modo libero?

(Update 14/6/19: nella versione iniziale mancava la condizione $ad - bc = 1$, che è necessaria.)

Esercizio 12.6. Costruisci un dominio fondamentale per il gruppo Γ dell'esercizio precedente. Mostra che ha aria finita.

Esercizio 12.7. Sia ancora Γ il gruppo dell'esercizio precedente. Per ogni intero $p \geq 2$, sia $\Gamma_p < \Gamma$ il sottogruppo formato dalle trasformazioni in cui

$$a \equiv 1, b \equiv 0, c \equiv 0, d \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mostra che Γ_p agisce in modo libero e propriamente discontinuo su H^2 se $p \geq 3$. Quindi se $p \geq 3$ otteniamo una superficie $S = H^2/\Gamma_p$ iperbolica completa. Facoltativo: per l'esercizio precedente S ha area finita. La superficie S è compatta?