

Geometria iperbolica

Esercizi I

Esercizio 1. Dimostra il teorema di Hopf-Rinow (puoi fare solo alcune delle implicazioni fra le tre condizioni equivalenti), il cui enunciato è il seguente.

Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

1. M è completa,
2. un sottoinsieme di M è compatto se e solo se è chiuso e limitato,
3. ogni geodetica è estendibile su tutto \mathbb{R} .

Esercizio 2. Considera il piano iperbolico I^2 con il modello dell'iperboloide. Mostra che data una retta $r \subset I^2$ e un punto $p \notin r$ esiste un'unica retta s perpendicolare a r passante per p .

Esercizio 3. Siano $r, r' \subset I^n$ due rette nello spazio iperbolico (con il modello dell'iperboloide). Mostra che esiste una isometria f tale che $f(r) = r'$ e $f(r') = r$.