# Geometria analitica e algebra lineare 2008/09

Esercizi 18/05/2009

**Esercizio 1.** Un endomorfismo nilpotente (cioè tale che $f^n = 0$ per qualche $n$) è diagonalizzabile se e solo se è nullo.

**Esercizio 2.** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \big\{(x,y,z,t) \bigm| x+y=0, y+z-t=0\big\}, \\ W_2 &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Determinare una matrice reale $4 \times 4$ che rappresenta (rispetto alla base canonica) un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

- $f(W_1) = W_1$ e $f(W_2) = W_2$;
- $f$ non è surgettiva;
- $f$ non è diagonalizzabile.

**Esercizio 3.** Dire quali delle matrici seguenti sono simili.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare se $A$ è diagonalizzabile.
2. Determinare se $A$ e $B$ sono simili.
3. Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori sia per $A$ che per $B$.

**Esercizio 5.** Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso. Mostra che per ogni $k < \dim V$ esiste un sottospazio $W$ di dimensione $k$ tale che $f(W) \subset W$.

**Esercizio 6.** Sia $f$ endomorfismo di uno spazio vettoriale reale tale che $f^n = \mathrm{id}$ per qualche $n$. Mostra che $f^2 = \mathrm{id}$ oppure $f$ non è diagonalizzabile.

**Esercizio 7.** Mostra che ogni endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha almeno un piano invariante. Costruisci esempi aventi esattamente 1, 2, 3 piani invarianti. Mostra che il numero di piani invarianti è 1, 2, 3 oppure infinito.

**Esercizio 8.** Costruisci due matrici $A, B$ reali $4 \times 4$ non simili ma aventi entrambe polinomio caratteristico $x^4 + 2x^2 + 1$.

**Esercizio 9.** Costruisci due matrici $A, B$ complesse $n \times n$ non simili ma aventi lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo. Qual è la minima dimensione $n$ in cui esiste un esempio di questo tipo?

**Esercizio 10.** Sia $A$ una matrice $n \times n$ reale. Sia $z$ un autovettore per $A$ vista come applicazione $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ avente autovalore non reale.

1. Mostra che i vettori $z + \bar{z}$ e $i(z - \bar{z})$ hanno coordinate reali.
2. Mostra che il piano reale $W \subset \mathbb{R}^n$ generato da $z + \bar{z}$ e $i(z - \bar{z})$ è invariante rispetto all'endomorfismo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determinato da $A$.
3. Deduci che ogni endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha almeno un piano invariante.

**Esercizio 11.** Costruisci un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ con esattamente un piano invariante.

**Esercizio 12.** Costruisci un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ non diagonalizzabile e avente infiniti piani invarianti. Mostra che un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ ha infiniti piani invarianti se e solo se il suo polinomio minimo ha grado minore o uguale a due.

**Esercizio 13.** Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo. Mostra che i fatti seguenti sono equivalenti.

1. Esiste una sola retta invariante per $f$.
2. Per ogni $1 \leqslant k \leqslant n$ esiste un unico sottospazio invariante di dimensione $k$.
3. L'endomorfismo ha polinomio minimo $m(x) = (\lambda - x)^n$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. La decomposizione di Jordan di $f$ è fatta di un blocco solo.