Geometria e algebra lineare 2009/10

Esercizi 18/11/2009

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z,t) \mid x+y=0, y+z-t=0\}, \\ W_2 &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Determinare le dimensioni di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Determinare il rango delle matrici seguenti, al variare di k:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo le due applicazioni lineari $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ date da:

$$\begin{aligned} f_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ay \\ x \\ 2x+y \end{pmatrix} \\ g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-y+2z \\ y-z \\ x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La prima applicazione f_a dipende da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

- Determinare una base per i sottospazi $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Im} f_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f_a$.

Esercizio 4. Siano f_a e g come nell'esercizio precedente.

- Determinare una base per $\ker g$.
- Completare la base trovata di $\ker g$ ad una base di $\mathbb{R}^3$.
- Determinare le dimensioni di $\ker g \cap \operatorname{Im} g$ e $\ker g + \operatorname{Im} g$.

Esercizio 5. Siano $U_t, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad V = \begin{cases} x_1 + tx_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base di $U_t, V, U_t \cap V$ e $U_t + V$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Siano U, V due sottospazi vettoriali di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Dimostra che $U \cap V$ non può avere dimensione zero.

Più in generale, siano U e V sottospazi vettoriali distinti di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^n$. Dimostra che $U \cap V$ ha dimensione $n-2$.

Esercizio 7. Determina tre sottospazi U_1, U_2, U_3 di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ tali che $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

Più in generale, determina n sottospazi $U_1, U_2, \ldots, U_n$ in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n = \{0\}.$$

Esercizio 8. Nel seguente sistema, determinare il numero di soluzioni al variare di t.

$$\begin{cases} x + y + tz = 1 \\ x + y + t^3 z = 3 \\ 2x + 2y + (1+t)z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9. Si considerino al variare di $t \in \mathbb{R}$ i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 2-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+t \\ 2 \\ 4+t \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di W_1 e quella di W_2.
2. Dire per quali valori di t il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $W_1 + W_2$.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ y - z \\ 2x + 4z \end{pmatrix}.$$

- Determinare una base per il nucleo e l'immagine di f
- Trovare un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ avente dimensione 1 tale che $U + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $U \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Esercizio 11. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia U_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$U_k = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+kz+kt = 0, 2x+(2-k)y+3kz = 0, (2-k)x+2y+4kt = 0\}.$$

Sia inoltre

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\4\\5\end{pmatrix} \right\}$$

un altro sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

1. Calcolare la dimensione di U_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2. Costruire una base di $T = W \cap U_0$.

3. Trovare un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $T + Z = \mathbb{R}^4$ e $T \cap Z = \{0\}$.

Esercizio 12. Determinare equazioni cartesiane per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix} \right\}, \quad V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\-7\\7\end{pmatrix} \right\}.$$

Determinare i sottospazi $U \cap V$ e $U + V$.

Esercizio 13. Sia r una retta in $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine. Sia $\mathrm{Rif}_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta r. Sia θ l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x. La matrice associata a questa applicazione rispetto alla base canonica è la seguente:

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}.$$

Sia inoltre $\mathrm{Rot}_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione antioraria di angolo ϕ. La matrice associata a questa applicazione rispetto alla base canonica è la seguente:

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}.$$

1. Mostra che le riflessioni hanno determinante -1 mentre le rotazioni hanno determinante 1.

2. Scrivi Rif_r e Rot_ϕ rispetto alla base seguente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

   Nota che la matrice che rappresenta Rif_r è cambiata, mentre quella che rappresenta Rot_ϕ no.

3. Mostra che componendo due riflessioni (rispetto a due rette arbitrarie) si ottiene sempre una rotazione.

4. Mostra che componendo due rotazioni (di angoli arbitrari) si ottiene sempre una rotazione.

5. Mostra che componendo una rotazione ed una riflessione si ottiene sempre una riflessione.