Anno Accademico 2018/2019
Geometria 1
Prima prova in itinere
28/1/2019

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si considerino le matrici 2×2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 3 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia $f_a : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_a(A) = (\text{traccia}(A), \text{traccia}(AP), \text{traccia}(QA))^\top, \text{ per ogni } A \in M(2, \mathbb{R}).$$

a) Verificare che f_a è lineare.

b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$, $\dim \operatorname{Ker}(f_a) = 2$.

Ponendo $f = f_1$,

c) Trovare una base di $\operatorname{Ker}(f)$ ed estenderla ad una base di $M(2, \mathbb{R})$.

d) Costruire, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to M(2, \mathbb{R})$ tale che $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Im}(f)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e per $m \geq 1$, sia $\mathbb{K}_m[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado minore o uguale a m. Si ricordi che un polinomio q divide il polinomio p (e scriviamo $q|p$) se esiste un polinomio h tale che $p = hq$.
Fissato $q \in \mathbb{K}_m[t]$, $q \neq 0$, poniamo $M(q) = \{p \in \mathbb{K}_m[t] \text{ tali che } q|p\}$.

a) Dimostrare che $M(q)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}_m[t]$.

b) Determinare per quali m, $\mathbb{K}_m[t] = M(t^3) \oplus M(t^2 - 1)$.

c) Determinare per quali m, $\mathbb{K}_m[t] = M(t^3) + M(t^2 - 1)$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Data $A \in GL(n, \mathbb{K})$, sia $T_A \in \operatorname{End}(M(n, \mathbb{K}))$ definito da

$$T_A(X) = AXA^{-1}, \text{ per ogni } X \in M(n, \mathbb{K}).$$

a) Dimostrare che se $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$ sono simili, allora T_A e T_B sono endomorfismi coniugati.

b) Dimostrare che se $A \in GL(n, \mathbb{K})$ è diagonalizzabile allora anche T_A lo è.

c) Sia $A \in GL(n, \mathbb{K})$ diagonalizzabile con spettro $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ e rispettive moltiplicità $m_1, \dots, m_k$.
(i) Determinare lo spettro di T_A, mostrando in particolare che 1 è un autovalore.
(ii) Determinare la molteplicità dell'autovalore 1 di T_A.

Durata: 2 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.