Anno Accademico 2017/2018
Geometria I
Scritto del 14/2/2019

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 3. Siano W e Z due sottospazi di V, $\dim W = \dim Z = 2$, tali che $V = W + Z$. Sia $F = \{f \in \operatorname{End}(V) |\ f(W) \subset W,\ f(Z) \subset Z\}$.

a) Dimostrare che F è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$ e calcolarne la dimensione.

b) Al variare di f in F, determinare tutte e sole le forme normali di Jordan reali che si realizzano.

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{K}$ un campo e si consideri una successione finita di applicazioni lineari tra spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita della forma:

$$V_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-2} \to \cdots \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_0.$$

Supponiamo che $\dim V_{n+1} = \dim V_0 = 0$ e che $\operatorname{Im}(f_k) \subset \ker(f_{k-1})$ per ogni $k = 2, \ldots, n+1$. Per ogni $j = 1, \ldots, n$, denotiamo con H_j lo spazio vettoriale quoziente $\operatorname{Ker}(f_j)/\operatorname{Im}(f_{j+1})$. Dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \dim H_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \dim V_j \ .$$

Esercizio 3.

a) Sia $P = P_1 + iP_2 \in GL(n, \mathbb{C})$, dove $P_1, P_2 \in M(n, \mathbb{R})$ sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di P. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, poniamo $P(\lambda) = P_1 + \lambda P_2$. Dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $P(\lambda) \in GL(n, \mathbb{R})$.

b) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{C})$. Dimostrare *senza usare la teoria delle forme normali di Jordan reali o complesse* che A e B sono simili su $\mathbb{R}$ se e solo se lo sono su $\mathbb{C}$.

Esercizio 4.
Su $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, si consideri il prodotto scalare $\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - x_{n+1}y_{n+1}$, per ogni $x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R}$, e indichiamo con $O(n,1)$ il rispettivo gruppo ortogonale. Sia $H = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} |\ \varphi(X,X) = -1, x_{n+1} > 0\}$ e sia $F(H) = \{f \in O(n,1) |\ f(H) \subset H\}$. Dato $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ non isotropo, sia ρ_v la riflessione parallela a v.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) per ogni $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ isotropo non nullo, φ ristretto a $v^\perp$ è semidefinito positivo;

b) se $X, Y \in H$, $X \neq Y$, allora $\operatorname{Span}(X, Y)$ è un piano iperbolico e $\varphi(X, Y) < -1$;

c) se $f \in O(n,1)$ ed esiste $X \in H$ tale che $f(X) = X$, allora $f \in F(H)$;

d) per ogni $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ non isotropo, $\rho_v \in F(H)$ oppure $-\rho_v \in F(H)$;

e) ogni $f \in F(H)$ è composizione di riflessioni ciascuna delle quali appartiene a $F(H)$.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.