Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello dell'8/6/2015

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.
Se g è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n, diciamo che $v \in V$ genera una base di V ciclica per g se $\{v, g(v), g^2(v), \dots, g^{n-1}(v)\}$ è una base di V.

(a) Sia $J \in M(n, \mathbb{C})$ un blocco di Jordan relativo all'autovalore λ. Si verifichi che il vettore $e_n \in \mathbb{C}^n$ genera una base di $\mathbb{C}^n$ ciclica per J.

(b) Sia $f \in End(\mathbb{C}^4)$ un endomorfismo avente due autovalori distinti $\lambda \neq \mu$ e sia $\dim V'(\lambda) = \dim V'(\mu) = 2$, dove $V'(\lambda)$ e $V'(\mu)$ sono gli autospazi generalizzati relativi a λ e μ . Si provi che, se $z \in V'(\lambda)$ genera una base di $V'(\lambda)$ ciclica per $f|_{V'(\lambda)}$ e $w \in V'(\mu)$ genera una base di $V'(\mu)$ ciclica per $f|_{V'(\mu)}$, allora $z + w$ genera una base di $\mathbb{C}^4$ ciclica per f.

(c) Si determini una base di $\mathbb{C}^4$ di Jordan per la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e si calcoli il polinomio minimo di A.

(d) Si determini, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{C}^4$ che genera una base di $\mathbb{C}^4$ ciclica per A.

Esercizio 2.
Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Sullo spazio vettoriale $V = M(n, \mathbb{R})$ si considerino i prodotti scalari Φ e b definiti da

$$b(X, Y) = \operatorname{tr}(XY) \qquad \text{e} \qquad \Phi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY) - \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y) \qquad \forall X, Y \in V$$

dove tr denota il funzionale "traccia". Sia $T = \{A \in V \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

(a) Si verifichi che

$$V = T \oplus_b^{\perp} Span(I) \qquad \text{e} \qquad V = T \oplus_{\Phi}^{\perp} Span(I)$$

(dove i simboli $\oplus_b^{\perp}$ e $\oplus_{\Phi}^{\perp}$ indicano che gli ortogonali sono considerati rispetto ai prodotti scalari b e Φ rispettivamente).

(b) Si verifichi che $b|_T$ è non degenere e che Φ è non degenere.

(c) Si calcoli la segnatura di Φ.

Esercizio 3.
Per ogni sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, si consideri la famiglia di rette affini $\mathcal{L}_W = \{P + W \mid P \in \mathbb{R}^2\}$. Sia $\mathcal{C}$ una parabola di $\mathbb{R}^2$.

(a) Si mostri che esiste un unico sottospazio vettoriale W di dimensione 1 tale che ogni retta di $\mathcal{L}_W$ interseca $\mathcal{C}$ esattamente in un punto; si denoti poi tale famiglia $\mathcal{L}_W$ di rette con $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

(b) Sia g un'affinità di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}' = g(\mathcal{C})$. Si dimostri che $g(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}) = \{g(s) \mid s \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\}$ coincide con $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'}$.

(c) Siano $P, Q \in \mathcal{C}$ con $P \neq Q$ e sia M il punto medio di P e Q. Si denoti con U il punto di intersezione tra $\mathcal{C}$ e la retta di $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ passante per M. Si dimostri che esiste un'unica affinità f tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$.