A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I
Compito dell'8/7/2008

Esercizio 1
Siano V, W due K-spazi vettoriali di dimensione finita e siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di W tali che $W = W_1 \oplus W_2$. Siano $f\colon V \to W_1$ e $g\colon V \to W_2$ applicazioni lineari e si consideri l'applicazione $L\colon V \to W$ definita da $L(v) = f(v) + g(v)$ per ogni $v \in V$.

a) Verificare che L è lineare.
b) Verificare che $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
c) Verificare che $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ se e solo se $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = V$.

Esercizio 2
Costruire una applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e avente $p(t) = t^3(t-2)$ come polinomio caratteristico.
Calcolare inoltre $\dim \operatorname{Ker} f^2$ e $\dim \operatorname{Ker}(f - 2\,id)^2$.

Esercizio 3
Sia b il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Fissati i vettori $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2, \lambda)$ di $\mathbb{R}^2$, al variare di λ in $\mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $\phi\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \times \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\phi(f,g) = b(f(v_1), g(v_1)) + b(f(v_2), g(v_2)) \quad \forall f, g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

a) Verificare che ϕ è un prodotto scalare.
b) Calcolare il rango di ϕ al variare di λ in $\mathbb{R}$.
c) Per i valori di λ per cui ϕ è non degenere, verificare che ϕ non è definito positivo né definito negativo e calcolarne la segnatura.

Esercizio 4
Si considerino le matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se le matrici A e B sono equivalenti destra-sinistra, se sono simili e se sono congruenti.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.

A. A. 2007/2008
CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA II
Compito dell'8/7/2008

Esercizio 5

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Si considerino i sottospazi $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = x - y + 2z = 0\}$ e, per $\alpha \in \mathbb{R}$, $W_\alpha = \mathrm{Span}((1, 3, 0, 1), (0, 1 + 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha))$.

1) Esibire un sottospazio di dimensione massima tra i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ per cui la restrizione di φ è nulla.

2) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, W_α è φ-isometrico a W_1?

3) Per uno dei valori individuati al punto 2, costruire f, una isometria di $\mathbb{R}^4$ per φ tale che $f(W_\alpha) = W_1$.

Esercizio 6

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione n.

Per $h, k > 0$ poniamo $M_{h,k} = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \forall\, \lambda \in \mathrm{Spettro}(f)\ ma(\lambda) = h, mg(\lambda) = k\}$, dove ma e mg indicano rispettivamente la molteplicià algebrica e geometrica di un autovalore.

1) Determinare i valori di h e k per cui $M_{h,k}$ è non vuoto.

2) Determinare i valori di h e k per cui, per ogni $f, g \in M_{h,k}$, f e g hanno lo stesso spettro se e solo se sono simili.

Esercizio 7

Siano $p_0, p_\infty \in \mathbb{R}[x, y]$ due polinomi di grado 2 tali che le coniche $C_0, C_\infty \subset \mathbb{R}^2$ di equazioni $p_0 = 0$ e $p_\infty = 0$ rispettivamente, siano non vuote e disgiunte. Per $\beta \in \mathbb{R}$, poniamo $C_\beta \subset \mathbb{R}^2$ la conica di equazione $p_0 + \beta p_\infty = 0$.

1) Dimostrare che $\bigcup_{\beta \in \mathbb{R}} C_\beta \cup C_\infty = \mathbb{R}^2$ e che, per ogni $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a \neq b$, $C_a \cap C_b = \emptyset$.

2) Dimostrare che, se esiste $b \in \mathbb{R}$ per cui C_b è una coppia di rette incidenti, allora, se esiste $a \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, tale che C_a è degenere e non vuota, allora C_a è un punto.

3) Costruire un esempio in cui esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che C_a è un punto e C_b è una coppia di rette incidenti.

Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli nome e numero di marticola.