A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA
GEOMETRIA I e II Compito del 16/06/2005

Esercizio 1 [G1]
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, W un suo sottospazio proprio e $L : V \to V$ una applicazione lineare.

(1) Dimostrare che $\dim L(W) \geqslant \dim W - \dim \operatorname{Ker} L$.
(2) Fornire un esempio per cui nella disuguaglianza precedente valga “$>$” e un esempio per cui valga “$=$”.
(3) Se $\dim V = 4$ e $\dim W = 3$, per ogni intero m con $0 \leq m \leq 4$ costruire, se esiste, un endomorfismo L di V tale che $\dim \operatorname{Ker} L = 2$ e $\dim L(W) = m$.

Esercizio 2 [G1, G1+2]
Sia $L_k : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ l’applicazione lineare definita da

$$L_k(p(t)) = p(0) + p(k)t + p(1)t^2,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(1) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, L_k è diagonalizzabile.
(2) Detta $G_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ l’applicazione lineare definita da

$$G_k(x, y, z) = 2kx + ky + (y - 2z)t + (kx - y + 3z)t^2,$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbb{R}_2[t] = \operatorname{Im} G_k \oplus \operatorname{Ker} L_k.$$

Esercizio 3 [G1]
Si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico. Sia F lo spazio vettoriale

$$F = \{A \in {}_n\mathbb{R}_n \mid Av \in v^\perp \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dimostrare che F coincide con l’insieme delle matrici antisimmetriche.

Esercizio 4 [G1]
Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\phi(X, Y) = {}^tXAY \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna terna di interi non negativi (i_+, i_-, i_0) tale che $i_+ + i_- + i_0 = 2$ dire se esiste un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che la restrizione di ϕ ad U abbia come segnatura (i_+, i_-, i_0): se un tale U esiste, costruirne uno; altrimenti provare che non può esistere.

Sigle dell’esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II. Durata: 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell’esame.

Esercizio 5 [G2, G1+2]
Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$, φ il prodotto scalare su V definito da $\varphi(p,q) = p(1)q'(0) + p'(0)q(1)$ $\forall p,q \in V$, ψ il prodotto scalare definito positivo su V per cui la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ è ortonormale, $f \in V^*$ il funzionale definito da $f(p) = p(1) - p(-1)$ $\forall p \in V$.
1) Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste $v \in V$ tale che $f(p) = (\varphi + a\psi)(p,v)$ $\forall p \in V$?
2) Dimostrare che non esiste nessun $a \in \mathbb{R}$ per cui $\varphi + a\psi$ sia non degenere con indice di Witt uguale a 2.

Esercizio 6 [G2, G1+2]
Sia $f \in$End$(\mathbb{C}^n)$ con polinomio minimo $\mu_f(t) = t^k$.
1) Dimostrare che nella forma canonica di Jordan di f^{k-1} compaiono solo blocchi di taglia minore o uguale a 2..
2) Dimostrare che se nella forma canonica di Jordan di f compaiono solo blocchi di taglia maggiore o uguale a 4, allora nella forma canonica di Jordan di f^2 non compaiono blocchi di taglia 1.

Esercizio 7 [G2,G1+2]
Dimostrare che una conica non degenere passante per i vertici di un triangolo e per il suo baricentro è un'iperbole.