ANNO ACCADEMICO 2004/2005

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I   Secondo compitino   17/12/2004

Esercizio 1

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ y+z-t=0\big\}, \\ W_2 &= \mathrm{Span}\,\{(3,0,1,3),(2,1,0,3)\}. \end{aligned}$$

Costruire, se esiste, un endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi le seguenti proprietá:

(1) $f(W_1) = W_1$ e $f(W_2) = W_2$;

(2) f non è surgettiva;

(3) f non è diagonalizzabile.

Esercizio 2

Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali e sia $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\phi(A,B) = \mathrm{tr}\big((A + {}^tA)B\big).$$

(1) Verificare che ϕ è un prodotto scalare;

(2) Dire se ϕ è degenere e, in tal caso, trovare una base del radicale di ϕ;

(3) Trovare una base ortogonale e calcolare la segnatura di ϕ;

(4) Determinare, se esiste, un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 2, tale che $V = W \oplus W^\perp$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono simili.

b) Sia ϕ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Se esiste una base di vettori isotropi, allora ϕ è degenere.