Corso di Laurea in Fisica
Geometria I e II – Appello del 16/9/2003

Esercizio 1 (G1)
Sia $b \in \mathbb{R}$ e sia $A_b \in {}_n\mathbb{R}_n$ la matrice il cui elemento (i,j) è 1 se $i \neq j$ e b se $i = j$.
(1) Mostrare che $b-1$ è autovalore di A_b.
(2) Mostrare che il vettore $(1,1,\dots,1)$ è autovettore di A_b.
(3) Calcolare il determinante di A_b.

Esercizio 2 (G1, G1+2)
Dimostrare le seguenti affermazioni:
(1) $\forall A, B \in {}_n\mathbb{K}_n \quad \mathrm{rnk}A + \mathrm{rnk}B \leq \mathrm{rnk}(AB) + n$.
(2) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Dati due sottospazi $V_1, V_2 \subseteq V$, esiste un sottospazio $Z \subseteq V_2$ tale che $V_1 + V_2 = V_1 \oplus Z$.

Esercizio 3 (G1, G1+2)
Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = k^3 v_1$, per un certo $k \in \mathbb{R}$.
(1) Calcolare il polinomio minimo di f.
(2) Dimostrare che esiste un unico sottospazio $U \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 1 f-invariante.
(3) Dimostrare che esiste un unico sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 f-invariante.
(4) Per $k \neq 0$, mostrare che $f_{|_W}$ è un isomorfismo.
(5) Dimostrare che $\forall v \notin U \cup W$ l'insieme $\{v, f(v), f^2(v)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4 (G1)
Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, definito da $\varphi(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -8 \end{pmatrix} Y$.
(1) Calcolare la segnatura di φ.
(2) Determinare $W^\perp$, dove $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$.
(3) Dire se esiste una base ortogonale per φ contenente il vettore $(1,1,1)$ e, in tal caso, costruirla.

Esercizio 5 (G2, G1+2)
Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e, per $\lambda \in \mathbb{R}$, sia φ_λ il prodotto scalare su V definito dalla formula $\varphi_\lambda(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt + \lambda p'(0)q'(0)$.
(1) Dati i sottospazi di V, $U_1 = \mathrm{Span}(1, x^2)$, $U_2 = \mathrm{Span}(x, x^2+1)$, $U_3 = \mathrm{Span}(x, x^2-1)$, per quali $\lambda \in \mathbb{R} \quad U_1, U_2$ e U_3 sono φ_λ-isometrici?
(2) Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il funzionale $F : V \to \mathbb{R}$ definito da $F(p) = p(1)$ è rappresentabile tramite φ_λ?

Esercizio 6 (G2, G1+2)
(1) Studiare dal punto di vista affine le sezioni orizzontali della quadrica $C \subset \mathbb{R}^3$ data dall'equazione $3x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2xz + 4x - 2y + 2z = 0$.
(2) È vero che per ogni $c \in \mathbb{R}$ esiste $c' \in \mathbb{R}$, $c' \neq c$, tale che $C \cap \{z = c\}$ e $C \cap \{z = c'\}$ sono isometriche?

Esercizio 7 (G2)
Siano E, F due sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ e sia $M_{E,F}$ il luogo dei punti medi dei segmenti con un estremo in E e l'altro in F. Dimostrare che:
(1) $M_{E,F}$ è un sottospazio affine.
(2) $\mathrm{Giac}(M_{E,F}) = \mathrm{Giac}(E) + \mathrm{Giac}(F)$ (dove Giac indica la giacitura di un sottospazio).
(3) $E \cap F \neq \emptyset \iff M_{E,F} = E + F$.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore. Scrivere sul foglio: nome, numero di matricola e sigla dell'esame.