Analisi II. Foglio di esercizi n.1
30/09/2016

`Esercizi su prodotto scalare e sottoinsiemi di` $\mathbb{R}^n$

1. Dati due punti $\mathbf{A} = 2$ e $\mathbf{B} = -e$ in $\mathbb{R}$, calcolare la loro *distanza euclidea*.

2. Dati due punti $\mathbf{A} = (0, 1)$ e $\mathbf{B} = (\sqrt{2}, e)$ di $\mathbb{R}^2$, calcolare la loro *distanza euclidea* $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$.

3. Qual'è la distanza euclidea tra i seguenti vettori $\mathbf{v} = (1, \sqrt[3]{3}, -\tan 3)$ e $\mathbf{w} = (-7, 2, e^2)$?

4. Dimostrare che per ogni vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ il nuovo vettore $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ ha lunghezza unitaria.

5. Dati $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $\langle v, w \rangle$, scrivere una formula per determinare l'angolo convesso tra v e w. *Risposta:* $\arccos \left\langle \frac{v}{|v|}, \frac{w}{|w|} \right\rangle$.

6. Dati i vettori $x = (1, -1, 2)$ e $y = (\sqrt{2}, \sin 2, 0)$, calcolare il coseno dell'angolo convesso tra i due vettori.

7. Dati i vettori $x = \left(\frac{1}{e^2}, 0, 3\right)$ e $y = (\sqrt{2}, \sin 2, -1)$, calcolare il seno dell'angolo convesso tra i due vettori.

   Sugg. Se il prodotto scalare fosse negativo bisognerebbe aggiungere all'angolo ottenuto $\pi/2$.

8. Dati $x, y \in \mathbb{R}^4$ tali che $|x| = 1$, $|y| = 2$ e $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}$, calcolare la loro distanza $|x - y|$.

9. Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ il cui angolo convesso è $\pi/4$ e aventi lunghezze $|x| = a > 0$ e $|y| = b > 0$, determinare la loro distanza $|x - y|$.

10. (Equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$) Siano $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e consideriamo un vettore non nullo $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Osservare che i punti (x, y, z) del piano passante per P e ortogonale a v devono soddisfare la condizione

$$\langle (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), (a, b, c) \rangle = 0.$$

    Tradurre tale vincolo nell'equazione $ax + by + cz - d = 0$ con esplicita formula per il coefficiente d.

11. Dato il punto $P = (0, 1, -2)$ ed il vettore $v = (1, \sqrt{2}, 1)$ scrivere l'equazione del piano passante per P e ortogonale a v.

12. (Equazione di una retta in $\mathbb{R}^2$) Se $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ e $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, provare che l'insieme dei punti (x, y) appartenenti al piano passante per P e ortogonale a v soddisfa l'equazione

$$ax + by - d = 0$$

e determinare la formula per il coefficiente d.

13. Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$, provare che la distanza tra tali punti si può determinare utilizzando il prodotto scalare

$$|\mathbf{B} - \mathbf{A}| \;=\; \sqrt{|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}|^2 - 2|\mathbf{B}||\mathbf{A}|\cos\theta}$$

dove θ è l'angolo convesso tra i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

14. (Distanza di un punto dal piano) Dato $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ non appartenente al piano E di equazione $ax+by+cz-d = 0$ ed un qualunque punto (x, y, z) di E, definendo il vettore unitario $v = (a, b, c)/|(a, b, c)|$, osservare che

$$\left|\left\langle p_0 - (x, y, z), \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right\rangle\right| = |(x, y, z) - p_0|\,|\cos\theta|$$

è uguale alla distanza di p_0 dal piano E, ove θ è l'angolo convesso tra i vettori v e $p_0 - (x, y, z)$. Concludere che tale distanza vale

$$\left|\frac{d - \langle P_0, (a, b, c)\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

15. Determinare l'equazione del piano passante per $(1, 1, 1)$ e ortogonale a $(2, -1, 3)$.

16. Determinare l'equazione della retta passante per $(-1, 1)$ e ortogonale a $(-1, 7)$.

17. Determinare l'equazione dell'iperpiano in $\mathbb{R}^4$, passante per $(-1, 1, 1, 1)$ e ortogonale al vettore $(-1, 7, 2, -\sqrt{2})$.

18. Determinare l'equazione dell'iperpiano in $\mathbb{R}^n$, passante per

$$x_0 = (1, 2, 3, 4, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$$

e ortogonale al vettore $v = (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1})$.

19. Se fissiamo $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e denotiamo con $w = (x, y)$ la variabile in $\mathbb{R}^2$, scrivere l'equazione polinomiale che determina tutti i punti dell'insieme $\{w \in \mathbb{R}^2 : |w - u_0| = 7\}$.

20. Osservare che la palla chiusa $\mathbb{B}(w,r) \subset \mathbb{R}^n$ è effettivamente un insieme chiuso, mostrando che il complementare $\mathbb{B}(w,r)^c$ è un insieme aperto.

21. Dimostrare che se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi aperti, allora $A \cup B$ è un aperto.

22. Dato $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y^2 + z \leq 0,\ t < 0\}$

    (a) stabilire se A è chiuso, aperto, compatto o nessuna di tali possibilità,

    (b) determinare $\mathring{A}$, $\overline{A}$ e $D(A)$.

23. Dato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 3,\ 1 < y < 2\}$

    (a) stabilire se A è chiuso, aperto, compatto o nessuna di tali possibilità,

    (b) tracciare un grafico qualitativo di A,

    (c) determinare $\mathring{A}$, $\overline{A}$ e $D(A)$.

24. Dato $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y^2 \leq 0\}$

    (a) stabilire se A è chiuso, aperto, compatto o nessuna di tali possibilità,

    (b) tracciare un grafico qualitativo di A,

    (c) determinare $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $D(A)$ e ∂A.

25. Dato l'ellissoide $A = \left\{(x,y,z) : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\right\}$

    (a) stabilire se A è chiuso, aperto, compatto o nessuna di tali possibilità,

    (b) tracciare un grafico qualitativo di A,

    (c) determinare $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $D(A)$ e ∂A.

26. Dato $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 \geq 0,\ -1 \leq z \leq 2\}$

    (a) stabilire se F è chiuso, aperto, compatto o nessuna di tali possibilità,

    (b) tracciare un grafico qualitativo di F,

    (c) determinare $\mathring{F}$, $\overline{F}$ e $D(F)$.

27. Provare che l'insieme $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 = 0,\ 0 \leq z \leq 3\}$ è chiuso e limitato, quindi compatto. Osservare inoltre che F coincide con il grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ definita sull'insieme $\mathbb{B}(0,3)$ e tracciarne un grafico qualitativo.

28. Dato $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 < x^2 + z^2 < 1\}$

    (a) determinare $\overline{A}$ e tracciarne il grafico

(b) determinare $\mathring{A}$ e ∂A.

29. Dimostrare che $x_k \to w$ in $\mathbb{R}^n$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|w - x_k| \leq \varepsilon$ per ogni $k \geq n_\varepsilon$.

30. Consideriamo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} > 3, x^2 + y^2 \leq 16\}$. Tale insieme non è né aperto né chiuso.

    (a) Tracciare un grafico qualitativo della parte interna $\mathring{A}$

    (b) Scrivere $\overline{A}$, ∂A e $D(A)$.

31. Tracciare un grafico qualitativo di $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x > 0\}$, stabilire se è limitato, chiuso, aperto e scrivere la sua frontiera ∂A.

32. Tracciare il grafico dell'insieme

$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - 4 < 0,\ y^2 + z^2 - 1 < x < 5\Big\}.$$

    Sugg. Vedere A come intersezione di $\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - 4 < 0\}$

$$\text{e} \quad \Omega_2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - 1 < x < 5\Big\}.$$

33. Tracciare il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ e stabilire se tale insieme è, chiuso, aperto e limitato.

34. Sia $f(x, y) = 1 + \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Evidentemente abbiamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tracciare un grafico qualitativo.

    Sugg. Osserviamo che f è non negativa: ovvero $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

35. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1 - x - y, x^2 + 2y^2 + z \leq 8\}$. Stabilire se l'insieme è limitato, aperto, chiuso. Scrivere sia la frontiera che la sua parte interna.

    Sugg. Si consiglia di tracciare un grafico qualitativo di tale insieme, evidenziando separatamente il piano associato alla prima disuguaglianza ed il paraboloide solido associato alla seconda.

    Oss. Nel caso $z \geq 0$ abbiamo $0 \leq z \leq 8$, mentre nel caso $z \leq 0$ abbiamo

$$|z| < x + y - 1 \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{2y^2} \leq \sqrt{8 + |z|} + \sqrt{8 + |z|} = 2\sqrt{8 + |z|}$$

    ovvero per $t = |z|$ abbiamo $t^2 \leq 4(8 + t)$. Tale disequazione implica che t sia compreso in un intervallo limitato, dato dalle due radici del relativo polinomio.

36. Se $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \geq z^2 + x^2, y > 0\}$ osservare che tale insieme non è né aperto né chiuso, tracciarne un grafico qualitativo e verificare inoltre la validità delle seguenti uguaglianze.

    (a) $\mathring{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 > z^2 + x^2, y > 0\}$
    (b) $\overline{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \geq z^2 + x^2, y \geq 0\}$
    (c) $\partial A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2}\right\}$
    (d) $D(A) = \overline{A}$.

37. Se $A = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $B = \mathbb{R}$, verificare che $A \times B$ è un cilindro aperto illimitato in $\mathbb{R}^3$, tracciandone un grafico qualitativo e scrivendo l'insieme esplicitamente.

38. Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto, allora $A \subset D(A)$.

39. Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in A$, allora ci sono due sole possibilità tra loro esclusive: o x è un punto isolato di A, oppure x è di accumulazione.

40. Dimostrare che $x \in D(A)$ se e solo se esiste una successione $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ contenuta in $A \setminus \{x\}$ e tale che $x_k \to x$ per $k \to \infty$.