Programma d'esame dettagliato per il corso di

Analisi Matematica II e Complementi di Analisi Matematica

Corsi di laurea triennale in Ingegneria Chimica ed Ingegneria dell'Energia
Anno Accademico: 2014/2015
Crediti Formativi Universitari: 12

Valentino Magnani
Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
magnani@dm.unipi.it

(1) `Topologia di` $\mathbb{R}^n$.

- (a) Distanza euclidea, prodotto scalare ed esempi di norme in $\mathbb{R}^n$. Successioni in $\mathbb{R}^n$ e loro limiti. Insiemi aperti, chiusi, punti di accumulazione e punti di frontiera in $\mathbb{R}^n$. Insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$: definizione per successioni e caratterizzazione con la proprietà del sottoricoprimento finito di aperti. Insiemi connessi e connessi per archi in $\mathbb{R}^n$.
- (b) Limiti di più variabili reali, unicità del limite e teorema di permanenza del segno. Funzioni continue, combinazioni lineari di funzioni continue sono continue, composizioni di funzioni continue sono continue.
- (c) Teorema di Heine-Borel: i compatti in $\mathbb{R}^n$ sono insiemi chiusi e limitati.
  Teorema di Weierstrass: ogni funzione continua su un compatto ha massimo e minimo.

(2) `Calcolo differenziale, parte I.`

- (a) Derivata parziale, derivata direzionale e differenziale per funzioni reali e vettoriali. Gradiente di funzioni differenziabili reali e matrice jacobiana di funzioni differenziabili vettoriali.
- (b) Derivabilità della composizione di una curva derivabile con una funzione differenziabile (con dimostrazione). La continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità (con dimostrazione su aperti di $\mathbb{R}^2$). Teorema di Fermat: annullamento del gradiente nei punti di massimo o di minimo locale (con dimostrazione).
- (c) Derivate parziali di ordine superiore, differenziabilità di ordine k, funzioni multilineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$, teorema di Schwarz e classi di funzioni $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.
- (d) La composizione di una funzione vettoriale g di classe C^1 con una funzione scalare f di classe C^1 è ancora di classe C^1 (con dimostrazione), relativa formula per il gradiente della composizione e formula per le derivate parziali (con dimostrazione). Estensione del risultato precedente al caso in cui g è vettoriale.
- (e) Sistemi di coordinate sferiche, cilindriche e polari.
- (f) Sviluppi di Taylor con resto secondo Peano e secondo Lagrange (con dimostrazione).
- (g) Matrici simmetriche, forme quadratiche e criterio di Sylvester. Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi o di minimi locali (con dimostrazione), punti di sella.

(3) `Calcolo differenziale, parte II.`

- (a) Teorema della funzione implicita per funzioni reali su aperti di $\mathbb{R}^n$ (con dimostrazione), equazioni non lineari e relazioni con il teorema della funzione implicita.
- (b) Curve C^1 a tratti in $\mathbb{R}^n$ e formula per il calcolo della loro lunghezza.
- (c) Integrale curvilineo di funzione scalare e sua invarianza per cambio di parametrizzazione della curva (con dimostrazione).
- (d) Campi vettoriali conservativi e campi vettoriali chiusi. Campi vettoriali radiali.
- (e) Integrali curvilinei di campi vettoriali lungo curve C^1 a tratti. Loro dipendenza dalla sola orientazione della parametrizzazione della curva (con dimostrazione).

(f) Caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi su un aperto di $\mathbb{R}^n$: tramite la circuitazione nulla su ogni curva chiusa C^1 a tratti nell'aperto e tramite la dipendenza dell'integrale curvilineo dai soli estremi di una qualunque curva C^1 a tratti scelta nell'aperto (con dimostrazione).
(g) Curve omotope ad un punto, insiemi semplicemente connessi ed esempi.
(h) Caratterizzazione dei campi conservativi su aperti connessi e semplicemente connessi.
(i) Spazio duale di $\mathbb{R}^n$ e sua base duale rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^n$.
(j) 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ e loro integrazione lungo curve C^1 a tratti, primitive di 1-forme differenziali, 1-forme differenziali esatte e chiuse.
(k) Formulazione dei punti (3f) e (3h) sostituendo ai campi vettoriali le 1-forme differenziali.

(4) `Integrazione secondo Lebesgue.`

(a) Plurintervalli e loro misura, misura di insiemi aperti e di insiemi compatti. Misura esterna e misura interna di un insieme limitato. La misura esterna è sempre maggiore o uguale della misura interna (con dimostrazione). Insiemi misurabili limitati e loro caratterizzazione tramite l'approssimazione esterna con aperti ed interna con compatti (con dimostrazione).
(b) Insiemi misurabili secondo Lebesgue (non necessariamente limitati). Gli aperti e i chiusi sono misurabili (dimostrazione facoltativa). Proprietà degli insiemi misurabili rispetto le operazioni di intersezione finita e numerabile, differenza ed unione finita e numerabile.
(c) Additività numerabile e subadditività numerabile della misura di Lebesgue. Insiemi a misura nulla ed esempi.
(d) Funzioni semplici, funzioni misurabili, combinazioni lineari e prodotti di funzioni misurabili sono misurabili, ove ben definite. Le funzioni continue sono misurabili (con dimostrazione). Integrale di Lebesgue e funzioni integrabili secondo Lebesgue. La combinazione lineare di funzioni integrabili è integrabile. L'integrale di Lebesgue opera linearmente sullo spazio lineare reale delle funzioni integrabili.
(e) Relazione tra funzioni integrabili secondo Riemann e funzioni integrabili secondo Lebesgue. Teorema di Tonelli e teorema di Fubini. Teorema di cambiamento di variabile.

(5) `Varietà in` $\mathbb{R}^n$ `e moltiplicatori di Lagrange.`

(a) Teorema della mappa implicita per funzioni vettoriali e k-varietà di $\mathbb{R}^n$.
(b) Definizioni equivalenti di k-superfici in $\mathbb{R}^n$, punti regolari di un insieme e parametrizzazioni locali. Spazio tangente di una k-varietà di $\mathbb{R}^n$ in un punto sia come nucleo di mappa lineare, che come immagine di mappa lineare, ovvero in forma parametrica.
(c) Punti critici di funzioni reali su k-varietà di $\mathbb{R}^n$. I punti di massimo e di minimo locali di funzioni in punti regolari di un insieme sono critici (con dimostrazione).
(d) Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni reali su k-varietà (con dimostrazione), ovvero caratterizzazione dei punti critici con un sistema non lineare.

(6) `Misura di area ed elementi di Analisi Vettoriale.`

(a) Jacobiano di una mappa differenziabile da un aperto di $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$, con $n \leq m$; formula per la misura di area di dimensione k in $\mathbb{R}^n$ data da un'immagine di funzione, particolarizzazione della formula per l'area nel caso di ipersuperfici in forma grafico. Integrale di una funzione reale continua su una k-varietà di $\mathbb{R}^n$ rispetto la misura di area di dimensione k.
(b) Punti di frontiera regolari e aperti con frontiera regolare in $\mathbb{R}^n$. Superfici regolari a pezzi e superfici con bordo in $\mathbb{R}^3$, bordi regolari di superfici in $\mathbb{R}^3$, flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie e teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.
(c) Orientazione indotta sul bordo di un aperto regolare del piano. Teorema di Gauss-Green (con dimostrazione, utilizzando il teorema della divergenza). Prodotto vettoriale e sue proprietà geometriche, rotore di un campo vettoriale, orientazione indotta sul bordo di una superficie di $\mathbb{R}^3$ rispetto una normale fissata sulla superficie, teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$.

(7) `Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie.`
   (a) Spazi metrici completi, spazi funzionali e contrazioni tra spazi metrici. Esistenza ed unicità per il problema di Cauchy (con dimostrazione). Soluzione massimale, sua unicità, teorema di abbandono dei compatti e teorema di estensione globale.
   (b) Metodo grafico per studi qualitativi di equazioni differenziali del primo ordine. Equazioni differenziali a variabili separabili.
   (c) Sistemi lineari a coefficienti continui. Struttura dell'insieme delle soluzioni per il caso omogeneo e non omogeneo. Problema di Cauchy per equazioni lineari di ordine n e sua caratterizzazione come speciale sistema lineare del primo ordine. Struttura delle soluzioni per equazioni lineari di ordine n sia nel caso omogeneo che non omogeneo, nozione di integrale generale. Base esplicita di soluzioni per equazioni differenziali lineari omogenee di ordine n a coefficienti costanti. Soluzione particolare quando il termine omogeneo è il prodotto di un polinomio per un esponenziale. Soluzione particolare nel caso generale, tramite variazione delle costanti.
   (d) Norma di Frobenius e spazio di Banach delle matrici quadrate. Matrice esponenziale e soluzione di un sistema lineare a coefficienti costanti sia omogeneo che non omogeneo, tramite la matrice esponenziale. Matrice esponenziale rappresentata da n soluzioni di n problemi di Cauchy (con dimostrazione). Speciali soluzioni di sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti tramite autovettori e autovalori della matrice (con dimostrazione). Polinomio caratteristico di una matrice quadrata complessa e autospazi generalizzati. Soluzioni tramite gli autovettori generalizzati. Base generale di soluzioni per un qualunque sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti.
   (e) Sistemi autonomi di equazioni differenziali non lineari e proprietà delle loro soluzioni. Punti di equilibrio di sistemi autonomi: stabili, instabili e asintoticamente stabili. Caratterizzazione della stabilità, instabilità e stabilità asintotica per un qualunque sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti. Punti di equilibrio iperbolici per sistemi non lineari e caratterizzazione della loro stabilità per linearizzazione (Teorema di Hartman-Grobman).

(8) `Successioni e serie di funzioni.`
   (a) Nozioni di convergenza puntuale, uniforme e totale per successioni e per serie di funzioni. La convergenza totale implica la convergenza uniforme (con dimostrazione). Limiti uniformi di successioni di funzioni continue sono continui (dimostrazione facoltativa).
   (b) Convergenza puntuale, uniforme e totale per serie di funzioni complesse. Limite superiore di una successione reale. Serie di potenze reali, serie di potenze complesse e loro raggio di convergenza. Teorema del raggio di convergenza (con dimostrazione).

(9) `Funzioni olomorfe.`
   (a) Definizione di derivata complessa e di funzione olomorfa. Combinazioni lineari complesse e prodotti di funzioni olomorfe sono olomorfe (con dimostrazione). Divisione complessa di funzioni olomorfe, ove definita, è olomorfa (con dimostrazione). Composizioni di funzioni olomorfe sono olomorfe. Equazioni di Cauchy-Riemann per una funzione olomorfa (con dimostrazione). Integrali complessi lungo cammini C^1 a tratti di $\mathbb{C}$.
   (b) Funzioni analitiche ed analiticità delle funzioni olomorfe. Formula per lo sviluppo in serie di potenze complesse di una funzione olomorfa. Annullamento dell'integrale complesso di una funzione olomorfa lungo l'unione finita di curve chiuse C^1 che formano la frontiera di un aperto limitato (con dimostrazione). Formula di Cauchy per una funzione olomorfa (con dimostrazione), singolarità isolate, espansione in serie di Laurent e residui.

Suggerimenti e indicazioni bibliografiche

Gli argomenti del corso non seguono un testo specifico, è preferibile pertanto riferirsi alle lezioni. Tuttavia i vari argomenti trattati, con possibile diversità di presentazione, si possono trovare in diversi testi universitari per i corsi di Analisi Matematica, tra i quali si segnalano ad esempio i seguenti.

G. De Marco, *Analisi due. Teoria ed esercizi*, Zanichelli - Decibel, 1999

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica due*, Liguori, 1996

C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica, Volume 2*, Masson, 1998

Ulteriore materiale sulle funzioni olomorfe si può trovare anche nel testo di G. Gilardi, *analisi tre*, McGraw-Hill, 1994. Per la preparazione negli esercizi relativi al corso, oltre al materiale fornito nelle esercitazioni e nei fogli supplementari di esercizi, si segnalano ad esempio i seguenti testi.

G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di Analisi due*, Zanichelli - Decibel, 1998

P. Marcellini, C. Sbordone, *Esercizi di matematica*, Volume II, Tomi 1,2,3,4, Liguori, 2009

M. Bramanti, *Esercitazioni di Analisi Matematica 2*, Esculapio, 2012