ESERCITAZIONE MATLAB 1: **Vettori, matrici ed aritmetica finita**

1. Generare il vettore riga `x` ed il vettore colonna `y` contenenti i punti equispaziati $1, 2, \ldots, 10$ e $10, 9, \ldots, 1$, rispettivamente. Generare inoltre il vettore colonna `z` contenente 13 punti equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$.

2. Dato il vettore `x` di elementi $-5, -4, \ldots, 8, 9$ determinare l'elemento massimo, minimo, di valore assoluto massimo, di valore assoluto minimo, la somma degli elementi, la somma dei valori assoluti degli elementi.

3. Dato il vettore `z=[50:-5:10]` cosa restituiscono i seguenti comandi MATLAB?

   a) `length(z)`

   b) `z'`

   c) `z([1:2:9])=ones(1,5)`

   d) `z([3 7 1 5])=zeros(1,4)`

4. Dati i vettori `x=2:5` e `y=-3:2:3`. Dopo aver eseguito il comando `format rat,` si eseguano le seguenti istruzioni e si spieghi il risultato:

   b) `x.*y`

   c) `x./y`

   d) `x.^y`

5. Data la matrice

   `A = [1  5  8;  84  81  7;  12  34  71]`

   esaminare il contenuto di:

   `A(1,1),    A(2,1),    A(1,2),    A(3,3),`

   `A(:,1)    A(3,:),`

   `A(1:2,:)    A(:,2:3)`

6. Eseguire le seguenti istruzioni e spiegare il risultato:

   ```
   A = [1  5  8;  2  0  3]
   x = [-1  10  1]
   y = [6;  7;  9]
   B = [A; x]
   B(:,3) = y
   ```

7. Data la matrice `A = [1  2;  3  4]` ed il vettore `b = [3;  7]`

   calcolare:

   `A+A,  A-A,  A*A,  A^2,  A',  A.*A,  A.^2,  A*b,  b'*A.`

8. Data la matrice `A=[1 2 3; 2 3 4; 3 4 5]` cosa restituiscono i seguenti comandi MATLAB?

   a) `size(A)`

c) `A(1,2)=A(2,1)`

d) `A(2,[3 1 2])=[1 2 3]`

e) `A(1,:)=A(2,:).*A(2,[3:-1:1])`

9. Data la matrice 5×5

```
A=[1:5; 6:10; 11:15; 16:20; 21:25]
```

a) generare le matrici `U` triangolare superiore ed `L` triangolare inferiore i cui elementi diversi da zero coincidono con quelli omonimi di A; successivamente, porre tutti gli elementi della diagonale principale della matrice `U` uguali a 0 e quelli della matrice `L` uguali ad 1.

b) generare le matrici `T`, `BS` e `BI` rispettivamente tridiagonale, bidiagonale superiore e bidiagonale inferiore, i cui elementi non nulli coincidono con quelli omonimi di A.

Suggerimento: Utilizzare i comandi `tril,` `triu` e `diag`

10. Applicare i seguenti due algoritmi per il calcolo di una radice della seguente equazione di secondo grado

$$y^2 + 2py - q = 0$$

con $p = 4.\underbrace{99999999999}_{11 \text{ volte}}5 \cdot 10^4$ e $q = 10^{-2}$.

Algoritmo 1:

```
delta = p^2+q
r = sqrt(delta)
y1 = -p + r
```

Algoritmo 2:

```
delta = p^2+q
r  = sqrt(delta)
z  = -p - r
y1 = -q/z
```

La soluzione esatta è $y_1 = 10^{-7}$. Spiegare il motivo per cui il primo algoritmo fornisce un risultato inaccurato.

11. Determinare il più efficace algoritmo per calcolare, in aritmetica finita,

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Suggerimento: l'algoritmo deve prevenire per quanto possibile l'overflow.
Si testi la procedura prendendo $x = 2^{600}$ e $y = x\sqrt{u/2}$ dove u denota la precisione di macchina (ovvero `eps/2` in Matlab).

SOLUZIONI:

1. `x=1:10;`
   `y=10:-1:1; y=y';`
   `z=linspace(0,1,13); z=z';`

2. `x = -5:9;`

`max(x)`	(`ans` = **9**)	`min(x)`	(`ans` = **−5**)	`max(abs(x))`	(`ans` = **9**)
`min(abs(x))`	(`ans` = **0**)	`sum(x)`	(`ans` = **30**)	`sum(abs(x))`	(`ans` = **60**)

3. a) `length(z)` restituisce la lunghezza del vettore `z`, cioè **9**.

   b) `z'` restituisce il vettore trasposto di `z`, cioè il vettore colonna

$$\texttt{z'} = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \\ 40 \\ 35 \\ \vdots \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   c) `z([1:2:9])=ones(1,5)` assegna il valore 1 alle componenti di `z` di indice $1, 3, 5, 7, 9$;

   d) `z([3 7 1 5])=zeros(1,4)` assegna il valore 0 alle componenti di `z` di indice $3, 7, 1, 5$;

4. a) `x.*y` restituisce il vettore `ans` contenente il prodotto componente per componente tra i vettori `x` e `y` (`ans = [-6 3 4 15]`);

   b) `x./y` restituisce il vettore `ans` contenente il rapporto componente per componente tra i vettori `x` e `y` (`ans = [-2/3 -3 4 5/3]`);

   c) `x.^y` restituisce il vettore `ans` contenente le componenti di `x` elevate alla potenza specificata dalle corrispondenti componenti di `y` (`ans = [1/8 1/3 4 125]`).

5. `A(1,1) = 1`, `A(2,1) = 84`, `A(1,2) = 5`, `A(3,3) = 71`,
   `A(:,1)` restituisce la prima colonna di `A`,
   `A(3,:)` restituisce la terza riga di `A`,
   `A(1:2,:)` restituisce la sottomatrice di `A` costituita dalle sue prime due righe e da tutte le sue colonne,
   ovvero $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 84 & 81 & 7 \end{pmatrix}$,
   `A(:,2:3)` restituisce la sottomatrice di `A` costituita da tutte le sue righe e dalla seconda e terza colonna. ovvero $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 81 & 7 \\ 34 & 71 \end{pmatrix}$

6. Le prime tre istruzioni definiscono una matrice `A` di dimensione 2×3, un vettore riga `x` di lunghezza 3 ed un vettore colonna `y` della stessa lunghezza, rispettivamente;
   `B=[A;x]` definisce la matrice `B` di dimensione 3×3 le cui prime due righe coincidono con quelle di `A` mentre la terza coincide con il vettore `x`;
   `B(:,3) = y` sostituisce i valori della terza colonna di `B` con gli omonimi del vettore `y`.

7. `A+A`= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ `A-A`= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ `A*A`= $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ `A^2`= $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

   `A'`= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ `A.*A`= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$ `A.^2`= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$

   `A*b`= $\begin{pmatrix} 17 \\ 37 \end{pmatrix}$ `b'*A`= $\begin{pmatrix} 24 & 34 \end{pmatrix}$

8. a) `size(A)` restituisce la dimensione della matrice `A`, cioè **3** $\times$ **3**.

   b) `A(1,2)=A(2,1)` pone l'elemento $\texttt{A}_{12}$ uguale all'elemento $\texttt{A}_{21}$. Tuttavia, essendo `A` simmetrica tale posizione non risulta evidente!

   c) `A(2,[3 1 2])=[1 2 3]` restituisce la matrice `A`= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

   d) `A(1,:)=A(2,:).*A(2,[3:-1:1])` restituisce la matrice `A`= $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

9. a) `U = triu(A);` `L = tril(A);`
   `U = U-diag(diag(U));` `L = L-diag(diag(L))+eye(5);`

   b) `T= triu(tril(A,1),-1);`
   `BS=triu(T);` `BI=tril(T);`

10. Il primo algoritmo fornisce un risultato inaccurato poichè $p^2 \gg q$ e quindi $r = \sqrt{p^2+q} \approx p$. Questo implica che la somma algebrica $-p+r$, richiesta dalla terza istruzione del primo algoritmo, è mal condizionata ed, in particolare, si verifica il fenomeno della cancellazione numerica.
    Le operazioni coinvolte nel secondo algoritmo, invece, sono tutte ben condizionate e quindi il risultato finale è accurato compatibilmente con la precisione di macchina dello standard IEEE per la doppia precisione.

11. Se x oppure y sono molto grandi, in valore assoluto, allora il calcolo di x^2 o y^2 può provocare overflow. Al fine di prevenire per quanto possibile tale problema, quando $|x| \geq |y|$, conviene calcolare $\sqrt{x^2+y^2}$ usando la seguente espressione equivalente

$$|x|\sqrt{1+(y/x)^2}.$$

    In questo modo, infatti, $|y/x| < 1$ e quindi il calcolo di $(y/x)^2$ non provoca sicuramente overflow.
    In modo analogo, l'espressione che conviene usare quando $|y| \geq |x|$ è

$$|y|\sqrt{1+(x/y)^2}.$$