1. Esercizi prima settimana

Esercizio 1.1. Sia A un dominio. Per un A modulo M si definisce

$$\operatorname{Tors} M = \{m \in M \ : \ \text{esiste } a \neq 0 \text{ tale che } am = 0\}.$$

Se $\operatorname{Tors} M = 0$ allora M si dice senza torsione. Dimostrare che l'essere senza torsione è una proprietà locale (in senso forte).

Esercizio 1.2. Sia A noetheriano, M un modulo finitamente generato e S una parte moltiplicativa di A. Si dimostri che per ogni modulo N,

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M,N) \simeq \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

[Fare prima il caso in cui M sia libero e poi descrivere M come quoziente di un modulo libero]

Esercizio 1.3. Mostrare che la proprietà di essere noetheriano per un anello non è un fatto locale esibendo un anello non noetheriano le cui localizzazioni negli ideali primi sono tutte noetheriane.

Esercizio 1.4. Si dimostri che un A-modulo M è piatto se e solo per ogni ideale I di A la mappa

$$I \otimes M \longrightarrow M \qquad a \otimes m \mapsto a\,m$$

è iniettiva.

Esercizio 1.5. Sia M un A modulo piatto e sia

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una successione esatta. Si dimostri che per ogni modulo N, la successione

$$0 \longrightarrow N \otimes X \longrightarrow N \otimes Y \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow 0$$

è esatta.

Esercizio 1.6. Sia $f : \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ di gruppi abeliani e tale che $f(e_i) = 0$ per ogni i. Allora $f = 0$.

Esercizio 1.7. Si dimostri che $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ non è un modulo libero.

Esercizio 1.8. Sia $A = \mathbb{C}[x,y]$. Fare un esempio di un modulo senza torsione, finitamente generato e che non sia piatto.

2. Esercizi 1 ottobre

Per martedì 8 ottobre consegnare 2 esercizi. Uno dei due deve essere scelto tra l'1.2 e l'1.5. L'altro tra i rimanenti.

Esercizio 2.1. Sia A un anello noetheriano e I un suo ideale.

(1) Si dimostri che $Ass_A(I)/I = Ass_{A/I}(0)$;
(2) Si dimostri che $x \in I$ se e solo $x \in I_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p} \in Ass_A(I)$[Ridursi a $I = 0$ e usare la descrizione dei divisori di 0]

Esercizio 2.2. Sia A un anello, I un ideale di A e $f \in A$ e $X = \operatorname{Spec} A$. I seguenti spazi topologici sono omeomorfi:

(1) $\operatorname{Spec} A \simeq \operatorname{Spec} A/\sqrt{0}$;
(2) $\operatorname{Spec} A/I \simeq V(I) \subset \operatorname{Spec} A$;
(3) $\operatorname{Spec} A_f \simeq X_f$.

Esercizio 2.3. Sia $\operatorname{Spec} A$ sconnesso. Si dimostri che esistono due anelli unitari non banali B e C tali che $A \simeq B \times C$.

Esercizio 2.4. Uno spazio topologico X si dice riducibile se si può scrivere come l'unione di due chiusi diversi da X. Uno spazio topologico non riducibile si dice irriducibile. Dimostrare che $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{0}$ è un ideale primo.

3. Esercizi 8 ottobre

Per martedì 15 ottobre consegnare l'esercizio 3.4 e un altro esercizio tra la lista seguente. Gli esercizi devono essere consegnati in forma cartacea entro la lezione di martedì 15. Chi per qualche motivo non potesse consegnarli in forma cartacea mi deve scrivere una email entro lunedì.

Esercizio 3.1. Sia $\Bbbk$ un campo. Si dimostri che $\Bbbk((x))$ non è un'estensione algebrica di $\Bbbk(x)$.

Esercizio 3.2. Sia $\Bbbk$ un campo. Dimostrare che $A = \Bbbk[X,Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua normalizzazione (cioè la chiusura integrale di A nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 3.3. Sia A un dominio. Dimostrare che la proprietà di essere normale è locale.

Esercizio 3.4. Sia $A \subset B$ una estensione di anelli. Se S è una parte moltiplicativa di A allora

$$\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}\overline{A}^{B}.$$

Esercizio 3.5. Sia E un campo non necessariamente algebricamente chiuso e sia $E \subset A$ con A una E-algebra finitamente generata. Si dimostri che per ogni ideale I di A vale

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I \textit{ massimale}} \mathfrak{m}.$$

Esercizio 3.6. Sia M un A-modulo finitamente presentato e sia $\mathfrak{p}$ un primo di A. Se $M_\mathfrak{p}$ è un modulo libero allora esiste $a \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ tale che M_a è un modulo libero.

4. Esercizi 15 ottobre

Per martedì 22 ottobre consegnare un esercizio a scelta tra 4.4, 4.5, 4.6. Vorrei inoltre che per ognuno di questi 3 esercizi almeno uno consegnasse la soluzione relativa. Gli esercizi devono essere consegnati in forma cartacea entro la lezione di martedì 22. Chi per qualche motivo non potesse consegnarli in forma cartacea mi deve scrivere una email entro lunedì.

Esercizio 4.1. Sia $\Bbbk$ un campo e sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata. Si dimostri che A è artiniana se e solo se $\dim_\Bbbk A < \infty$.

Esercizio 4.2. Fare un esempio di una estensione di $\mathbb{C}$-algebre finitamente generate $A \subset B$ (iniettiva) tale che $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ sia chiusa ma B non sia intera su A.

Esercizio 4.3. Sia $A \subset B$ una estensione intera, $\Bbbk$ un campo algebricamente chiuso e $f : A \longrightarrow \Bbbk$ un morfismo di anelli. Dimostrare che f si può estendere a tutto B.

Esercizio 4.4. Si dimostri che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going down. [Siano $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ primi di A e sia $\mathfrak{q}_2$ un primo di $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_2$ e sia I l'estensione di $\mathfrak{p}_1$ in B. Si mostri preliminarmente che $A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/I$ è piatta e se ne deduca che è iniettiva.]

Esercizio 4.5. Sia $A \subset B$ una estensione di anelli e sia C la chiusura integrate di A in B. Si dimostri che la chiusura integrale di $A[t]$ in $B[t]$ è uguale a $C[t]$. In particolare se A è un dominio normale lo è anche $A[t]$. Potrebbe essere utile seguire i seguenti passi

(1) Se R è un anello e f è un polinomio monico a coefficienti in R allora esiste una estensione $R \subset S$ tale che f si spezza come prodotto di fattori lilneari monici in $S[t]$
(2) se $f, g \in B[t]$ sono monici e $fg \in C[t]$ allora $f, g \in C[t]$.
(3) Osservare che se f è intero su $A[t]$ allora lo è anche $f + t^N$.

Esercizio 4.6. Un dominio A si dice di valutazione se per ogni x nel suo campo dei quozienti o $x \in A$ o $x^{-1} \in A$. Dimostrare che se A è di valutazione allora A è locale e normale. Dimostrare che un anello di valutazione noetheriano è un anello di valutazione discreta o un campo.

5. Esercizi 22 ottobre

Per giovedì 31 ottobre consegnare un esercizio a scelta tra 5.1, 5.3, 5.4, 5.5 e uno a scelta tra 5.6 e 5.7
Gli esercizi devono essere consegnati in forma cartacea entro la lezione di giovedì 31. Chi per qualche motivo non potesse consegnarli in forma cartacea mi deve scrivere una email entro mercoledì.

Esercizio 5.1. Sia A un anello. Se $x \in A$ poniamo $S_x = x^{\mathbb{N}}(1 + Ax)$ e $A_{\{x\}} = S_x^{-1}A$. Si dimostri che A ha dimensione minore o uguale a ℓ se e solo se per ogni x, l'anello $A_{\{x\}}$ ha dimensione minore o uguale a $\ell - 1$.

Esercizio 5.2. Sia $\Bbbk$ un campo di caratteristica p e sia α un elemento di $\Bbbk[[t]]$ non divisibile per t che non sia algebrico su $\Bbbk(t)$ e sia $\beta = \alpha^p$. Sia $K = \Bbbk(x, \beta)$ e $L = \Bbbk(x, \alpha)$. Sia $A = K \cap \Bbbk[[x]]$ e $B = L \cap \Bbbk[[x]]$.

(1) $[L : K] = p$ e L è il campo dei quozienti di B e K di A;
(2) A e B sono normali e B è la chiusura intergrale di A in L;
(3) per ogni n possiamo scrivere $\beta = f_n + x^{np} g_n$ con f_n un polinomio in x di grado minore di np e $g_n \in A$;
(4) $g_n^{1/p}$ è in B;
(5) B non è un A-modulo finito.

Esercizio 5.3. Sia A un anello locale noetheriano regolare di dimensione d e sia $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. Si dimostri che $A/(x_1, \ldots, x_i)$ ha dimensione $d - i$.

Esercizio 5.4. Sia A un dominio noetheriano. Si dimostri che A è fattoriale se e solo se ogni ideale primo di altezza uno è principale.

Esercizio 5.5. Sia A un anello noetheriano di dimensione finita. Si dimostri che $\dim A[x] = 1 + \dim A$. [usare il teorema sulla fibra che faremo giovedi']

Esercizio 5.6. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale in $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_m]$. Dimostrare che $A_\mathfrak{m}$ è regolare.

Esercizio 5.7. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_d)$. Sia $E = A/\mathfrak{m}$. Si dimostri che

a) $\dim_E \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leqslant n - \mathrm{rango}_E\, Jf(\mathfrak{m})$ [Si può prendere per buono l'esercizio precedente]
b) Se $\mathrm{rango}_E\, Jf(\mathfrak{m}) = d$ si dimostri che $A_\mathfrak{m}$ è regolare di dimensione $n - d$.

6. Esercizi 29 ottobre

Per giovedì 7 novembre consegnare un esercizio a scelta tra il 6.2, 6.3, e uno a scelta tra 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8. Gli esercizi devono essere consegnati in forma cartacea entro la lezione di giovedì 7. Chi per qualche motivo non potesse consegnarli in forma cartacea mi deve scrivere una email entro mercoledì. Chi sta seguendo teoria delle categorie non può fare come esercizio qualcosa che avete fatto in quel corso.

NB: per chi avesse gia' dato una occhiata agli esercizi, li ho dovuto cambiare perche' non sono riuscito a fare tutto quello che avrei voluto.

Esercizio 6.1. Sia A un anello noetheriano. Dimostrare che ogni catena discendente di ideali primi stabilizza.

Esercizio 6.2. Quali sono le mappe di $\mathbb{C}$ -algebre $f : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ tali che l'associata applicazione tra gli spettri è sia aperta che chiusa.

Esercizio 6.3. Sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli noetheriani tale che B è finitamente generato come A-algebra e che verifica la condizione di going down. Dimostrare che l'applicazione associata $\varphi : X = \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(A)$ è aperta. [Il caso fondamentale è dimostrare che $\varphi(X)$ è aperto. Per dimostrare questo osservare che la chiusura di $\varphi(X)$ è l'unione dei $V(\mathfrak{p}_i)$ con $\mathfrak{p}_i$ i primi minimali di A che sono contrazione di ideali di B. Ridursi quindi al caso in cui la chiusura di $\varphi(X)$ è tutto Y.]

Esercizio 6.4. Sia $\mathcal{C}$ una categoria nella quale esista sempre il prodotto di due oggetti e sia I un categoria i cui oggetti e i cui morfismi siano insiemi (questa ipotesi è solo perché abbiamo dato la definizione di limite in questa generalità). Siano $F, G : I \longrightarrow \mathcal{C}$ due funtori tali che esista il limite $a = \varprojlim F(i)$ e $b = \varprojlim G(i)$. Allora $\varprojlim F(i) \times G(i) = a \times b$.

[NB: questo esercizio non è enunciato in modo completo: il prodotto non è solo un oggetto ma un oggetto e una coppia di morfismi, fa parte dell'esercizio capire e definire i morfismi]

Definizione. *Se $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sono due funtori una trasformazione naturale $\alpha : F \longrightarrow G$ vuol dire dare per ogni $c \in C$ un morfismo $\alpha_c : F(c) \longrightarrow G(c)$ tale che per ogni $\varphi : c \longrightarrow c'$ il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(c) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] & G(c') \end{tikzcd}$$

Esercizio 6.5. Sia $\mathcal{C}$ una categoria nella quale esista sempre l'equalizzatore di due morfismi e sia I un categoria i cui oggetti e i cui morfismi siano insiemi (questa ipotesi è solo perché abbiamo dato la definizione di limite in questa generalità). Siano $F, G, H : I \longrightarrow \mathcal{C}$ due funtori tali che esista il limite $a = \varprojlim F(i)$ e $b = \varprojlim G(i)$ e $c = \varprojlim H(i)$.

Sia inoltre date tre trasformazioni naturali

$$\alpha : F \longrightarrow G \text{ e } \beta, \gamma : G \longrightarrow H$$

tale che per ogni i, $\alpha_i : F(i) \longrightarrow G(i)$ sia l'equalizzatore di $\beta_i\ \gamma_i : G(i) \longrightarrow H(i)$. Si dimostri che sono definiti morfismi $L\alpha : a \longrightarrow b$ e $L\beta, L\gamma : b \longrightarrow c$ (in qualche senso da rendere preciso limiti dei α_i, β_i e γ_i) tali che $L\alpha$ è l'equalizzatore di $L\beta, L\gamma$

[NB: fa parte dell'esercizio capire come sono definiti $L\alpha, L\beta, L\gamma$]

Esercizio 6.6. Dimostrare che $\varinjlim(M_i \otimes_A N) \simeq (\varinjlim M_i) \otimes_A N$. È vera l'analoga affermazione per i limiti proiettivi?

Esercizio 6.7. Fare un esempio di una succesione di sequenze esatte il cui limite proiettivo non è esatto.

Esercizio 6.8. Dimostrare che se M è un modulo finitamente generato e $N = \varinjlim N_i$ è un limite filtrato, allora $\varinjlim \mathrm{Hom}(M, N_i) = \mathrm{Hom}(M, N)$. Fare un controesempio nel caso in cui M non sia finitamente generato.

7. Esercizi 8 novembre

Per lunedì 18 novembre consegnare due esercizi a scelta tra il 7.1, 7.2, 7.6, 7.7, 7.9 con la condizione che almeno uno debba essere scelto tra gli ultimi tre. Gli esercizi devono essere consegnati in forma cartacea entro la lezione di lunedì 18. Chi per qualche motivo non potesse consegnarli in forma cartacea mi deve scrivere una email entro lunedì.

Esercizio 7.1. Si descrivano i coprodotti nella categoria degli anelli commutativi unitari.

Esercizio 7.2. Si dimostri che il limite induttivo filtrato di moduli piatti è piatto.

Esercizio 7.3. Sia A l'anello delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}$, I l'ideale delle funzioni che si annullano in 0 e $J = \bigcap I^n$. Esibire una funzione che sta in J ma che non è annullata da nessun elemento della forma $(1 + f)$ con $f \in I$.

Esercizio 7.4. Sia A un dominio e sia $a \in A$ un elemento diverso da zero, sia infine K il campo dei quozienti di A. Dimostrare che l'inclusione naturale $A \subset K$ induce una inclusione

$$\frac{A[x,y]}{(x^n y = a)} \subset \frac{K[x,y]}{(x^n y = a)} \simeq K[x^{\pm 1}].$$

In particolare $A[x,y]/(x^n y = a)$ è un dominio.

Esercizio 7.5. Il seguente esercizio fornisce un controesempio a $I \cdot \bigcap I^n = \bigcap I^n$, (proprietà che abbiamo dimostrato essere vera a lezione per anelli noetheriani come conseguenza del lemma di Artin-Rees). In alternativa a sviluppare l'esempio costruito sotto, potete cercare un esempio diverso dal mio; magari trovate qualcosa di meglio.

Sia $R = \mathbb{C}[u, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, ...]$ l'anello dei polinomi nella variabile u e nelle variabili x_i, y_i con $i \in \mathbb{N}_+$. Sia J l'ideale di R generato da tutti gli elementi $u - x_i^i y_i$ e $\bar{R} = R/J$. Se $f \in R$ indico con $\bar{f}$ la sua immagine in $\bar{R}$. Sia $\bar{I}$ l'ideale di $\bar{R}$ generato dagli elementi $\bar{x}_i$. Infine sia $X = \bigcap \bar{I}^n$. Si dimostri che

i) $\bar{R}$ è un dominio e $\bar{u} \neq 0$;
ii) X è generato da $\bar{u}$;
iii) $X \neq \bar{I} \cdot X$.

Esercizio 7.6. Dimostrare che se A è noetheriano, allora il limite induttivo filtrato di moduli iniettivi è iniettivo.

Esercizio 7.7. Sia $M = \mathbb{C}[x]/(x)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva e una iniettiva del $\mathbb{C}[x]$-modulo M.

Esercizio 7.8. Sia $M = \mathbb{C}[x,y]/(x,y)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva del $\mathbb{C}[x,y]$-modulo M.

Esercizio 7.9. Si costruisca una risoluzione iniettiva del $\mathbb{C}[x,y]$-modulo M dell'esercizio precedente.

8. Esercizi 25 novembre

Questa sara' l'ultima serie di esercizi da consegnare. Consegnare le soluzioni di quattro dei seguenti esercizi per martedì 10 dicembre. Sceglierne al massimo due tra gli ultimi tre.

Esercizio 8.1. Sia (F^n, ω^n) un δ-funtore nella categoria degli A-moduli. Dimostrare che se per ogni A modulo x esiste un A-modulo u tale che $F^n(u) = 0$ per ogni $n > 0$ e una $\varphi : x \longrightarrow u$ iniettiva allora il δ funtore è universale. [limitarsi alla costruzione di α^1, dovete dare i dettagli dei passaggi diversi dal caso fatto in classe ma potete essere sintetici sui passaggi simili a quelli del caso fatto in classe; questa frase avra' senso dopo la lezione di lunedi' prossimo]

Esercizio 8.2. Se M è un gruppo abeliano indico con $M[0]$ il complesso che ha l'unico termine diverso da zero in grado 0 e tale termine è uguale a M e se $\varphi : M \longrightarrow N$ indico con $\varphi[0]$ la mappa indotta tra $M[0]$ e $N[0]$. Sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ la proiezione. Si dimostri che nella categoria omotopica la mappa

$$\pi[0] : \mathbb{Z}[0] \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)[0]$$

non ha nucleo.

Esercizio 8.3. Sia F un funtore dalla categoria degli A-moduli a quella dei B-moduli. Dimostrare che se F conserva i coprodotti finiti allora F è additivo.

Esercizio 8.4. Sia $X^{p,q}$ un complesso doppio ovvero per ogni p, q è assegnato

$$\partial_o^{p,q} : X^{p,q} \longrightarrow X^{p+1,q} \qquad \partial_v^{p,q} : X^{p,q} \longrightarrow X^{p,q+1}$$

tali che le righe e le colonne sono complessi e tali che i quadrati commutano, ovvero

$$\partial_o^{p+1,q} \circ \partial_o^{p,q} = 0, \qquad \partial_v^{p,q+1} \circ \partial_v^{p,q} = 0, \qquad \partial_o^{p,q+1} \circ \partial_v^{p,q} = \partial_v^{p+1,q} \circ \partial_o^{p,q}.$$

Sia T il complesso definito nel modo seguente:

$$T^n = \bigoplus_{p+q=n} X^{p,q} \qquad \partial_T^n(x) = \partial_o^{p,q}(x) + (-1)^p \partial_v^{p,q}(x) \text{ per ogni } x \in X^{p,q} \subset T^n.$$

Si supponga che $X^{p,q} = 0$ per $q < 0$ e che le colonne siano esatte tranne in zero, ovvero che $H^n(X^{p,*}) = 0$ per ogni $n > 0$ e per ogni p. Sia infine $Y^p = \ker \partial_v^{p,0}$. Allora la composizione φ^p delle inclusioni $Y^p \subset X^{p,0} \subset T^p$ è un quasi isomorfismo di complessi.

Esercizio 8.5. Dimostrare che per ogni complesso di A-moduli M^* (non per forza limitato dal basso) esiste un complesso I^* fatto di moduli iniettivi e un quasi isomorfismo di complessi $\varphi : M^* \longrightarrow I^*$.

Mostrare con un esempio che tale risoluzione non è detto sia unica a meno di omotopia.

Esercizio 8.6. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore esatto a sinistra tra due categorie di moduli. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{A}$ con queste due proprietà:

- per ogni oggetto x di $\mathcal{A}$ esiste $y \in \mathcal{F}$ e un monomorfismo $\varphi : x \longrightarrow y$.
- per ogni successione esatta corta $0 \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow 0$ con $a, b \in \mathcal{F}$ si ha $c \in \mathcal{F}$ e $0 \longrightarrow Fa \longrightarrow Fb \longrightarrow Fc \longrightarrow 0$ è esatta.

Allora per ogni complesso limitato dal basso a^* con $a^n \in \mathcal{F}$ per ogni n si ha un quasi isomorfismo $F(a^*) \longrightarrow RF(a^*)$.

Esercizio 8.7. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano e sia $\Bbbk = A/\mathfrak{m}$. Dimostrare che

1. per ogni A modulo N si ha $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{Tor}_i(\Bbbk, N) = 0$ per ogni i. In particolare $\mathrm{Tor}_i(\Bbbk, N)$ ha la struttura di un $\Bbbk$-spazio vettoriale.
2. per ogni A modulo N si ha $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{Ext}_i(\Bbbk, N) = \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Ext}(N, \Bbbk) = 0$ per ogni i. In particolare $\mathrm{Ext}_i(\Bbbk, N)$ e $\mathrm{Ext}(N, \Bbbk)$ hanno la struttura di un $\Bbbk$-spazio vettoriale.
3. $\mathrm{Ext}_i(\Bbbk, \Bbbk)$ e $\mathrm{Tor}_i(\Bbbk, \Bbbk)$ hanno dimensione finita su $\Bbbk$ e $\dim_\Bbbk \mathrm{Ext}_i(\Bbbk, \Bbbk) = \dim_\Bbbk \mathrm{Tor}_i(\Bbbk, \Bbbk)$ per ogni i. [Costruire una risoluzione libera di $\Bbbk$ la più piccola possibile usando Nakayama]

Esercizio 8.8. Sia A un anello noetheriano tale che per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ e per ogni $A_\mathfrak{m}$-modulo finitamente generato la dimensione omologica proiettiva di M è minore o uguale a n [n fissato indipendente da M e $\mathfrak{m}$]. Si dimostri che la dimensione omologia proiettiva di ogni A modulo finitamente generato è minore o uguale a n.

Esercizio 8.9. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 = x^3)$ e sia $M = \mathbb{C}$ l'A modulo dove la moltiplicazione per x e y è uguale a zero. Calcolare la dimensione omologica proiettiva di M.