1. Verifica intermedia del 7 novembre 2012

1.1. Esercizio 1. Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 18. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

1.2. Esercizio 1bis. (Variante del primo esercizio) Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 35a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 9. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

1.3. Esercizio 2.

(a) Si dia un esempio di una successione a_n con termini diversi da zero tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim \frac{a_n}{n} = +\infty$;
(b) Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ si dimostri che $\lim a_n = 0$.

1.4. Esercizio 3. Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = +\infty$. È sempre vero che esiste il limite (finito o infinito) della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

2. Soluzioni degli esercizi della prova intermedia

Commento alle soluzioni. Il compito è stato pensato più come un test di autovalutazione (per questo vale solo 10 punti su 100) che come una valutazione che secondo me in questo mese dell'anno non ha ancora molto senso.

Queste sono alcune indicazioni che possono essere utili per l'autovalutazione.

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio non sta studiando a sufficienza o ha una preparazione di base che deve rafforzare;
(2) chi ha fatto il primo esercizio ma si è sentito perso nel resto del compito senza riuscire a fare altro, anche se sta studiando, in prospettiva deve capire le cose più a fondo e forse cambiare un poco il modo in cui studiare. Siamo all'inizio dell'anno e c'è tutto il tempo per farlo, però deve cercare di fare un qualche salto di qualità. A fine corso, una preparazione che permette di fare gli esercizi per la cui soluzione si è più o meno fornito un algoritmo risolutivo a lezione, senza una comprensione concettuale più profonda, potrebbe non essere sufficiente per passare l'esame.
(3) chi ha fatto il primo esercizio e il punto (a) del secondo esercizio, secondo me sta studiando e ha fondamentalmente capito anche le cose che abbiamo fatto. Deve forse solo entrare un po' di più in alcuni modi di ragionare e nel linguaggio che man mano si farà un po' più pesante. In altre parole direi deve fare attenzione un po' di più alla parte teorica cercando di capirne la struttura e le idee;

(4) chi ha fatto più di questo secondo me sta già studiando bene. Se non ha fatto tutto non mi preoccuperei, è solo mancata un poco di esperienza, ma piano piano sicuramente la svilupperà.

Naturalemente ci possono essere mille altre possibile combinazioni. Aldilà di come è andato il compito conta anche quanto vi sembra di essere lontani dalle soluzioni.

Soluzione esercizio 1 (prima versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 20b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 2$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,10^n + C\,2^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 18$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 10\,B + 2\,C = 18 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 10^n - 2^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n - 2^n} = \sqrt[n]{10^n \left(2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n\right)} = 10\sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione se una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 10$.

Soluzione esercizio 1 (seconda versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 35b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 5$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,7^n + C\,5^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 9$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 7\,B + 5\,C = 9 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 7^n - 5^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n - 5^n} = \sqrt[n]{7^n \left(2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right)} = 7\sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione su una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 7$.

Soluzione esercizio 2. La successione

$$a_n = n^2$$

ha le proprietá richieste nel punto (a).

Dimostriamo adesso l'affermazione del punto (b). Da $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ricaviamo che esiste n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ per $n \geqslant n_0$. Da questa equazione ricaviamo $0 < a_{n+1} < \frac{3}{4}a_n$ per $n \geqslant n_0$ e quindi per induzione

$$0 < a_n < a_{n_0}(\frac{3}{4})^{n-n_0}$$

per ogni $n \geqslant n_0$. Abbiamo cosí dimostrato che la successione a_n è definitivamente compresa tra due successioni che tendono a 0, quindi tende anche essa a 0.

Soluzione esercizio 3. Costruiamo una successione a_n tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$ e per la quale non esiste il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Definiamo

$$a_n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ (n+1)^{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare $a_n \geqslant n^n$ e quindi $\frac{a_n}{n!} > \frac{n^n}{n!}$ da cui $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$.

Inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{(n+2)^{n+2}}{n^n} > n^2 & \text{se } n \text{ é pari;} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare non esiste il limite della succesione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3. II compitino, 21 dicembre 2012

3.1. **Esercizio 1.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x}.$$

3.2. **Esercizio 2.** Si consideri la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}; \\ a_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Se ne calcoli il limite.

3.3. **Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Cosa vuol dire che $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$? (scrivere la definizione per esteso e stando attenti ai dettagli);
b) Dimostrare, usando solo la definizione, che se $\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 3$ allora $\lim_{x \longrightarrow 0} f(2+x^2) = 3$;
c) Dare un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{y \longrightarrow 0} g(y) = 0 \text{ e } \lim_{x \longrightarrow 0} g(f(x)) = 1.$$

3.4. **Esercizio 4.** Sia $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che esiste $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ e che tale limite è finito.

Soluzioni del II compitino

Commento alle soluzioni. Valgono piò o meno commenti simili all'altra volta:

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio e il 3a) non sta studiando o sta studiando troppo poco;
(2) chi è riuscito a fare il 2a) ma non il 2b) deve studiare di più e con molta più attenzione la parte di teoria, il 2b) era un caso particolare di un teorema fatto a lezione in due forme diverse. Come indicazione generale i teoremi fatti a lezione uno si aspetta che li sappiate piuttosto bene;

(3) il secondo esercizio lo considero un esercizio medio, standard ma non facilissimo perché la strategia è più articolata rispetto, per esempio, al primo esercizio. Diciamo come parte facile mi sarei aspettato che trasparisse un minimo una strategia;

(4) dai risultati la mia impressione generale è che in linea di massima venga presa un poco sottogamba la parte più concettuale del corso, come, per esempio, non sapere definizione fondamentali come quella di limite.

Soluzione esercizio 1. Razionalizzando l'espressione otteniamo

$$\frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{(\sqrt{e^x+3}+2)}$$

Per x che tende a zero, sappiamo che il primo termine di questa espressione tende ad 1. Il numeratore del secondo termine tende ad 1 ed il denominatore, essendo la funzione esponenziale e la radice quadrata funzioni continue tende a $\sqrt{e^0+3}+2 = 4$. Quindi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{1}{4}.$$

Soluzione esercizio 2. Dimostriamo che la successione è decrescente e limitata. Studiamo quando $a_{n+1} < a_n$. Se indichiamo a_n con x otteniamo

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < x \quad \text{ovvero} \quad (x-1)(x-\frac{3}{2}) < 0$$

ovvero $x \in (1, \frac{3}{2}) = I$. Quindi se $1 < a_n < \frac{3}{2}$ allora $a_{n+1} < a_n$.

Dimostriamo per induzione che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ per ogni n. Per $n = 1$ è vero. Per $n \geqslant 1$ supponiamo che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ e dimostriamo che $a_{n+1} \in (1, \frac{3}{2})$. Se indichiamo a_n con x otteniamo $1 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ ovvero

$$0 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x^2 - \frac{3}{2}x < 0$$

la prima disequazione è equivalente a $x < \frac{1}{2}$ o $x > 1$ e la seconda a $x \in (0, \frac{3}{2})$. Entrambe sono verificate per $x \in (1, \frac{3}{2})$.

Quindi esiste il limite della successione e lo indichiamo con ℓ. Inoltre essendo la successione decrescente e maggiore di 1 sappiamo che ℓ è maggiore o uguale a 1 e minore di $\frac{5}{4}$.

Facendo il limite a destra e sinistra dell'equazione $a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}$ otteniamo $\ell = \ell^2 - \frac{3}{2}\ell + \frac{3}{2}$ ovvero $\ell = 1$ o $\ell = \frac{3}{2}$. Poiché il limite è minore o uguale a $\frac{5}{4}$ otteniamo $\ell = 1$.

Soluzione esercizio 3. a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora il limite per x che tende a 2 della funzione $f(x)$ è uguale a 3 se e solo se (la risposta inizia qui) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \neq 2$ e $|x-2| < \delta$ allora $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Sia $\varepsilon > 0$, allora dalla definizione di limite sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $|y-2| < \delta$ e $y \neq 2$ allora $|f(y) - 3| < \varepsilon$. Fissiamo un tale δ.

Scegliamo adesso $\gamma = \sqrt{\delta}$ allora $\gamma > 0$ e per $|x| < \gamma$ abbiamo che $|x^2| < \delta$ quindi se poniamo $y = 2 + x^2$ abbiamo $|y-2| = |x^2| < \delta$. Inoltre se $x \neq 0$ abbiamo $y \neq 2$, quindi se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(y) - 3| < \varepsilon$.

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma > 0$ tale che se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(2+x^2) - 3| < \varepsilon$, ovvero che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(2+x^2) = 3$.

c) Sia $f(x) = 0$ per ogni x e sia $g(x)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0; \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

In particolare abbiamo che $g \circ f(x) = 1$ per ogni x e quindi le due funzioni soddisfano le richieste.

Soluzione esercizio 4. Sia $B = \{f(x) : x < 0\}$. Si noti che tale insieme è limitato superiormente da $f(0)$ perché $f(x) < f(0)$ per ogni $x < 0$ essendo la funzione crescente. Quindi $L = \sup B < \infty$. Dimostriamo che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = L$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore esiste $b \in B$ tale che $b > L - \varepsilon$. Sia $b = f(x_1)$ con $x_1 < 0$. Poniamo $\delta = -x_1$, quindi $\delta > 0$. Infine osserviamo che se $|x| < \delta$ e $x \neq 0$ e $x \in (0, \infty]$ allora abbiamo $x_1 < x < 0$, in particolare $f(x) \in B$, quindi

$$L - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leqslant L < L + \varepsilon$$

da cui $|f(x) - L| < \varepsilon$.

4. Compitino 4 aprile 2013

4.1. **Esercizio 1.** Sia $z = 3 + 4i$ si calcolino $|z|$, z^{-1} e $\bar{z}$.

4.2. **Esercizio 2.** Sia data la funzione:

$$g(x) = \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$$

Si descriva il dominio di definizione di g e si dica se g si possa estendere in modo continuo agli estremi del dominio di definizione. In caso tale estensione esista si dica inoltre se l'estensione è derivabile.

4.3. **Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Dare la definizione di "f è derivabile in 0".
b) Si supponga che f sia derivabile in 0 e si supponga che 0 sia un punto di massimo. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

4.4. **Esercizio 3.** Si consideri la funzione $f(x) = e^x - 3x^2$ e sia $g(x)$ la sua derivata.

a) Mostrare che la funzione $g(x)$ ha esattamente due zeri.
b) Quanti zeri ha la funzione $f(x)$?

4.5. **Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Si supponga che $f'(x) = 2$ per ogni x e che $f(0) = 0$. Si dimostri che $f(x) = 2x$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$\bar{z} = 3 - 4i$.
$z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Soluzione esercizio 2. L'espressione che definisce g è definita per $x \neq 0$ e $1 + x > 0$. Quindi

$$Dominio(g) = (-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Per x che tende a -1 abbiamo che $1 + x$ tende a zero e quindi $\log(1 + x)$ tende a $-\infty$ mentre $-x$ e x^2 tendono a 1. Quindi $g(x)$ tende a $-\infty$. In particolare la funzione g non si può estendere con continuità in -1.

Per studiare il limite di g per x che tende a zero utilizziamo l'approssimazione di $\log(1 + x)$ mediante i polinomi di Taylor. Abbiamo

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In particolare la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $g(0) = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile per $x \neq 0$. Per studiare derivabilità dell'estensione in zero calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Per calcolare questo limite usiamo di nuovo l'approssimazione di $\log(1+x)$ questa volta con il polinomio di Taylor di terzo grado. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui per il limite del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione è derivabile

Soluzione esercizio 3. a) La funzione f è derivabile in 0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

b) Sia 0 un punto di massimo per la funzione f quindi $f(x) \geqslant f(0)$ per ogni x ovvero $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per ogni x. Poiché la funzione è derivabile in zero esiste il rapporto incrementale e abbiamo che

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Da $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per $x < 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0.$$

Similmente per $x > 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0.$$

Quindi $f'(0) = 0$.

Soluzione esercizio 4. a) Derivando f otteniamo $g(x) = e^x - 6x$. Per calcolarne il numero di zeri studiamo dove la funzione è crescente e dove è decrescente. Calcolando $g'(x)$ otteniamo $e^x - 6$ quindi $g'(x) > 0$ se e solo se $x > \log 6$ e $g'(x) < 0$ se e solo se $x < \log 6$. Da questo deduciamo che la funzione è decrescente in $(-\infty, \log 6]$ e crescente in $[\log 6, \infty)$. In particolare la funzione può avere al massimo due zeri. Inoltre osserviamo che $g(0) = 1 > 0$, che $\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$ e che $g(\log 6) = 6 - 6\log 6 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano g ha esattamente due zeri che indichiamo con x_1 e x_2.

b) Dallo studio precedente ricaviamo che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ e nell'intervallo $[x_2, \infty)$ e che è decrescente nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Quindi al massimo f ha tre zeri. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - 3 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano f ha esattamente tre zeri.

Soluzione esercizio 5. Sia x un punto diverso da zero. Per il teorema di Lagrange esiste y compreso tra 0 e x tale che

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(y) = 2.$$

Quindi, usando $f(0) = 0$, otteniamo $\frac{f(x)}{x} = 2$ da cui $f(x) = 2x$.

5. Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, IV compitino, 29 maggio 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

5.1. **Esercizio.** Si dica se il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx.$$

5.2. **Esercizio.** a) Dare la definizione di serie convergente.

b) Sia a_n una successione a termini positivi e sia $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$ per ogni n. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

5.3. **Esercizio.** Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1+(\log x)^2)}.$$

5.4. **Esercizio.** Si dica per quali x la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + n)x^n.$$

5.5. **Esercizio.** Sia $F(x)$ la funzione definita da $F(x) = \int_0^x \sin(t+t^2)\, dt$. Si calcoli

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}.$$

6. Soluzioni

6.1. **Esercizio 1.** Osserviamo che nell'intervallo $(0,1]$ la funzione $\sin x$ è continua e strettamente positiva, quindi lo è anche la funzione $1/\sin(x)$. Per determinare la convergenza dell'integrale la confrontiamo con la funzione $1/x$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi la convergenza dell'integrale proposto nell'esercizio è equivalente a quella dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ che sappiamo non convergere.

6.2. **Esercizio 2.** a) Sia a_n una successione di numeri reali e sia S_n la successione delle somme parziali di a_n:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se esiste finito il limite della successione S_n.

b) Osserviamo che abbiamo $a_n \leqslant \frac{a_0}{2^n}$ per ogni n. Infatti ragionando per induzione otteniamo che per $n = 0$ questa affermazione é vera e se é vera per n allora

$$a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n \leqslant \frac{1}{2}\frac{a_0}{2^n} = \frac{a_0}{2^{n+1}}$$

e quindi é vera anche per $n+1$. Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{2^n}$ é convergente, per il criterio del confronto, otteniamo che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

6.3. **Esercizio 3.** Poniamo $y = \log x$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ da cui

$$\int \frac{1}{x(1+(\log x)^2)} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(y) = \arctan(\log x).$$

6.4. **Esercizio 4.** Si tratta di una serie di potenze. Calcoliamo inanzittutto il raggio di convergenza. Per determinare il raggio di convergeza basta studiare il caso in cui $x > 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Calcoliamo il limite del rapporto di due termini successivi. Otteniamo

$$\lim \frac{(2^{n+1}+n+1)x^{n+1}}{(2^n+n)x^n} = \lim \frac{2+\frac{n+1}{2^n}}{1+\frac{n}{2^n}} x = 2x$$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo che la serie converge per $0 \leqslant x < 1/2$ e diverge per $x > 1/2$. Quindi il raggio di convergenza è $1/2$. Inoltre per $x = \pm 1/2$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1 + \frac{n}{2^n})$$

il cui termine generale non tende a zero, quindi non è convergente.

Quindi la serie è convergente per $|x| < 1/2$ e non convergente altrimenti.

6.5. **Esercizio 5.** Osserviamo che F è derivabile e che abbiamo $DF(x) = \sin(x + x^2)$. Inoltre $D^2F(x) = (1+2x)\cos(x+x^2)$. Quindi il polinomio di Taylor di secondo grado calcolato per $x = 0$ è il polinomio $P(x) = F(0) + DF(0)x + \frac{D^2F(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$ e quindi abbiamo $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Abbiamo quindi che $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1/2$.

7. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 3 giugno 2013

7.1. **Esercizio 1.** Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\, dx.$$

7.2. **Esercizio 2.** Determinare i punti di massimo e i punti di minimo della funzione $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da: da:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{2}}$$

7.3. **Esercizio 3.** Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n}).$$

7.4. **Esercizio 4.** Siano $F(x)$ e $G(x)$ le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_0^x F(t)\, dt$$

[si noti che l'integrale con il quale è definita F è da 1 a x e non da 0 a x.]

(1) quanti zeri ha la funzione F?
(2) quanti zeri ha la funzione G?

8. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell' 1 luglio 2013

8.1. **Esercizio 1.** Si dica se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x}\, dx.$$

8.2. **Esercizio 2.** Dire per quali x la seguente serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3} x^n.$$

8.3. **Esercizio 3.**

(1) Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire che g è continua in 1 (dare la definizione).

(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{1+x^2}.$$

Dire quanti zeri ha la funzione f.

8.4. **Esercizio 4.** Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1-x^2}\right).$$

Determinare il dominio di definizione di f e dire se la funzione si può estendere con continuità agli estremi del dominio di definizione.

Si determinino inoltre i punti nei quali f è derivabile.

9. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell'11 settembre 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

9.1. **Esercizio 1.** Calcolare la primitiva di $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}$.

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\, dx.$$

9.2. **Esercizio 2.** Si dica se la seguente serie è convergente e se ne calcoli la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

[Per calcolarne la somma può essere utile osservare che si può riscrivere la serie come una serie telescopica]

9.3. **Esercizio 3.** Per un numero reale m si definisca la funzione f_m mediante $f_m(x) = e^x - mx$. Si dimostri che per $m = e$ la funzione f_e ha esattamente uno zero nell'intervallo $[0, 1]$. Si determinino tutti i valori di m per i quali f_m ha almeno uno zero nell'intervallo $[0, 1]$.

9.4. **Esercizio 4.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si determinino il dominio di definizione, punti di massimo e minimo locale, estremo superiore ed estremo inferiore.

10. Soluzioni del compito dell'11 settembre

10.1. **Esercizio 1.** Procedo per sostituzione. Pongo $y = e^{2x}$, da cui $dy = 2ydx$.

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y}dy = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})dy$$
$$= \frac{1}{2}(\log y - \log y + 1) = x - \frac{\log(e^{2x}+1)}{2}$$

L'integrando è definito e continuo per ogni x quindi per calcolare l'integrale improprio bisogna calcolare il limite

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\int_0^r \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \lim_{r\longrightarrow\infty}[r - \frac{\log(e^{2r}+1)}{2}]_0^r = \lim_{r\longrightarrow\infty} r - \frac{\log(e^{2r}+1)}{2} + \frac{\log 2}{2}.$$

Calcoliamo quindi il limite dei primi due termini di questa espressione.

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} r - \frac{1}{2}\log(e^{2r}+1) = \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}\big(\log e^{2r} - \log(e^{2r}+1)\big) = \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}\log\big(\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}\big)$$

Infine osserviamo che e^{2r} tende a più infinito e $\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}$ tende ad 1. Quindi $\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}\log\big(\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}\big) = 0$.

In particolare l'integrale improprio converge a $\frac{\log 2}{2}$.

10.2. **Esercizio 2.** Si osservi che

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

si tratta quindi di una serie telescopica, ovvero di una serie il cui termine generale è della forma $a_n - a_{n+1}$. Nel caso in questione abbiamo $a_n = \frac{1}{n^2}$ e osserviamo che $\lim a_n = 0$. Quindi, per quanto mostrato a lezione, la serie converge e la sua somma è uguale al primo termine della serie che in questo caso è $a_1 = 1$.

10.3. **Esercizio 3.** Osserviamo che per ogni valore di m la funzione f_m è continua e derivabile. Abbiamo inoltre che la sua derivata è uguale a $e^x - m$.

In particolare osserviamo che per $m = e$ la derivata è negativa in $[0,1)$ e quindi la funzione è decrescente nell'intervallo $[0,1]$. Quindi f non può avere più di uno zero. Infine $f_e(1) = 0$. Quindi ha esattamente uno zero.

In generale studiando il segno osserviamo che se $m \leqslant 0$ la funzione f_m è crescente su tutta la retta reale.

Se invece $m > 0$ osserviamo che f_m è decrescente per $x < \log m$ e crescente per $x > \log m$ in particolare $\log m$ è un punto di minimo assoluto.

In particolare ne ricaviamo che

(1) se $m \leqslant 1$ la funzione è decrescente in $[0,1]$;
(2) se $1 < m < e$ allora $0 < \log m < 1$ e quindi la funzione ha un punto di minimo assoluto in $\log m \in [0,1]$;
(3) se $m \geqslant e$ allora la funzione è decrescente in $[0,1]$.

Nel primo caso osserviamo che essendo $f_m(0) = 1$ avremo f_m maggiore di zero in $[0,1]$.

Nel secondo caso osserviamo che nel punto di minimo abbiamo

$$f_m(\log m) = m(1 - \log m) > 0$$

e quindi la funzione è sempre positiva.

Nel terzo caso osserviamo che $f_m(0) = 1$ e $f_m(1) = e - m < 0$ e quindi per il teorema di Bolzano la funzione ha almeno uno zero nell'intervallo $[0,1]$.

10.4. **Esercizio 4.** La funzione è definita per $\sin x \neq \cos x$ ovvero per $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Osserviamo inoltre che per $x \longrightarrow (\pi/4)^-$ abbiamo che $\sin x \longrightarrow (1/\sqrt{2})^-$ e $\cos x \longrightarrow (1/\sqrt{2})^+$ quindi $1/(\sin x - \cos x)$ tende a $-\infty$. Similmente per x che tende a $(\pi/4)^+$ otteniamo che la funzione tende a $+\infty$. Quindi estremo superiore ed inferiore sono ∞ e $-\infty$.

Per determinare i punti di massimo e minimo locale studiamo calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = -\frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Il segno della derivata è quindi opposto al segno di $\sin x + \cos x$. Abbiamo quindi che f è decrescente negli intervalli $[0, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4]$ e in $[7\pi/4, 2\pi]$ e che è crescente negli intervalli $[3\pi/4, 5\pi/4)$, $(5\pi/4, 7\pi/4]$.

Abbiamo quindi che $3\pi/4$ e 2π sono gli unici punti di minimo locale e 0 e $7\pi/4$ gli unici punti di massimo locale.