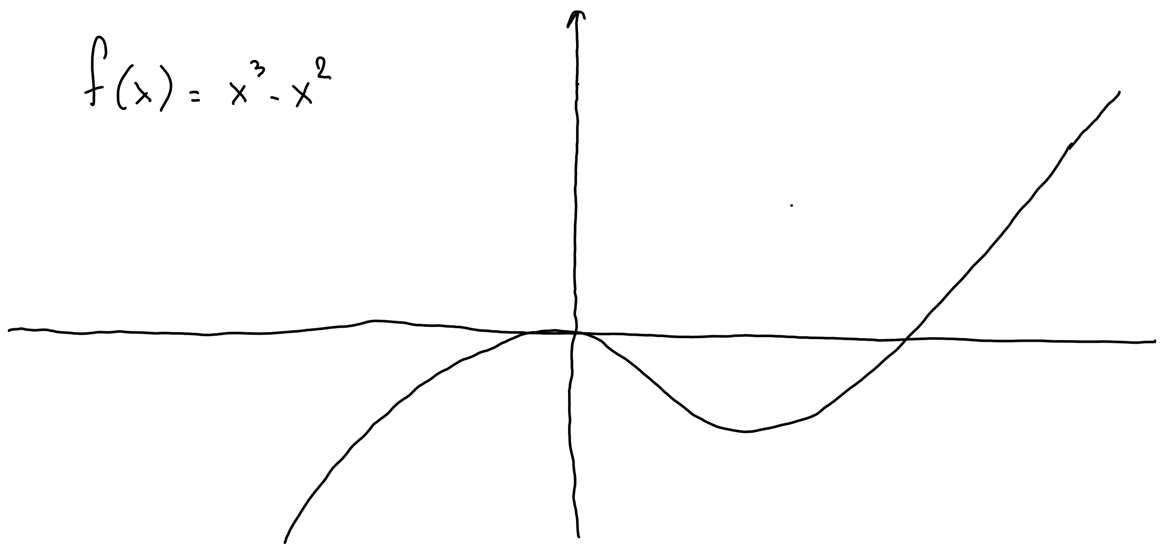
LEZIONE 6

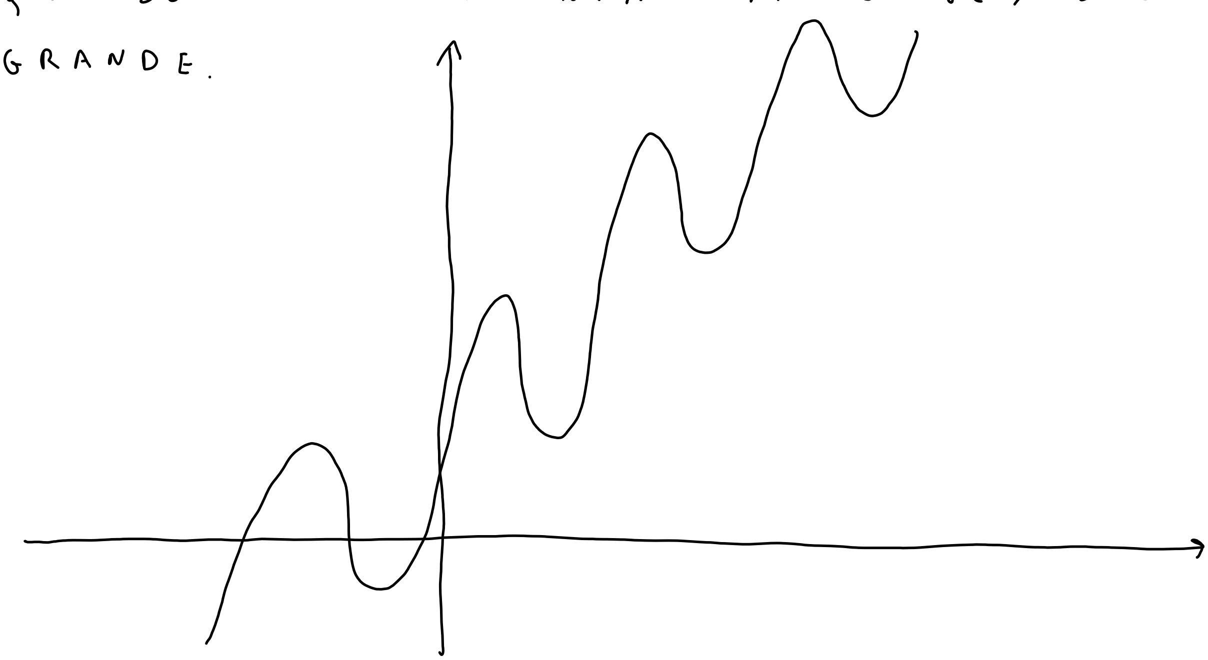
- FUNZIONI QUADRATICHE
- MASSIMI E MINIMI (LOCALI)
- FUNZIONI CRESCENTI IN UN INTERVALLO
- FUNZIONI CONVESSE

LIMITE PER $x \to +\infty$ E PER $x \to -\infty$

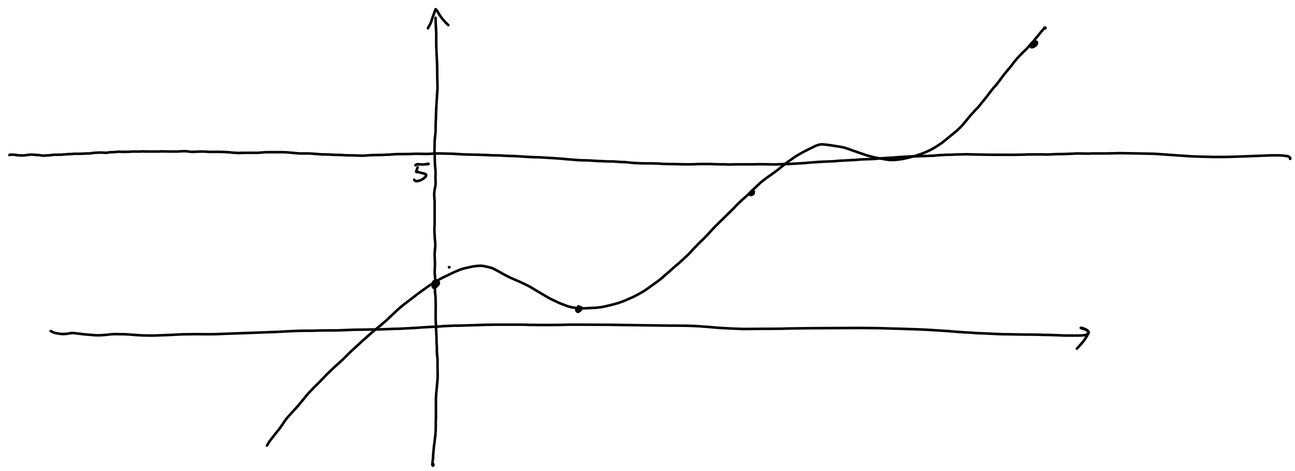
$f(x) = x^3 - x^2$



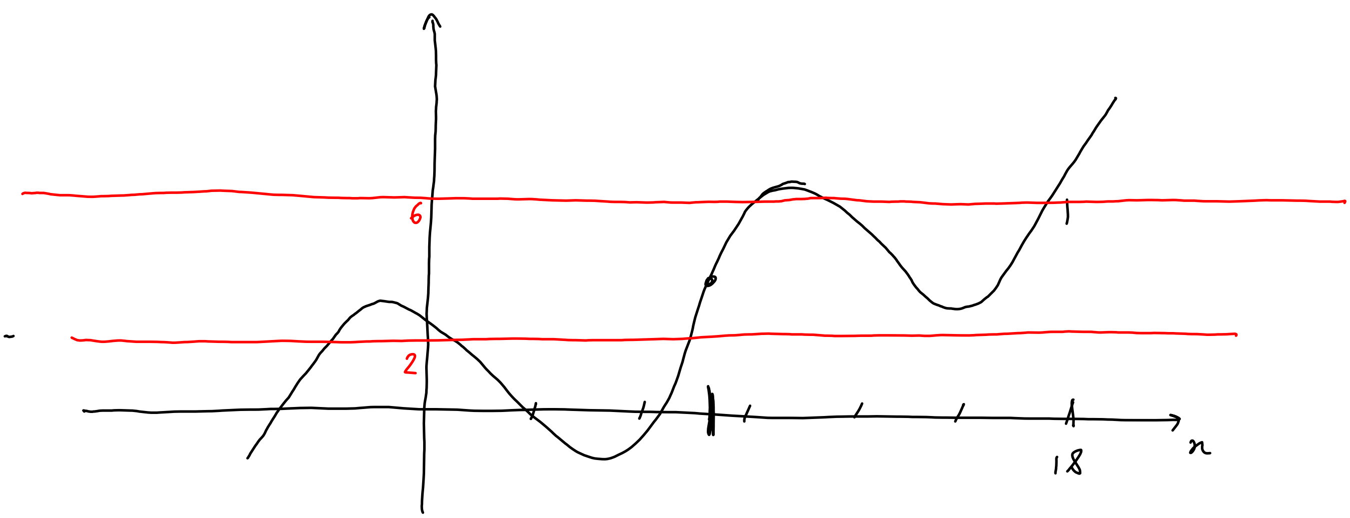
VOGLIAMO FORMALIZZARE IL FATTO CHE QUANDO x DIVENTA ANCHE $f(x)$ DIVENTA GRANDE.



LA FORMALIZZIAMO NEL SEGUENTE MODO



L'IDEA È QUESTA: DIRE CHE COMUNQUE IO FISSI UN NUMERO (NELL'ESEMPIO APPENA FATTO ERA 5) PRIMA O POI LA FUNZIONE LO SORPASSA E RIMANE SOPRA QUESTO NUMERO.



<u>DEFINIZIONE</u> SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE

DICIAMO CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

SI LEGGE IL LIMITE DI $f(x)$ PER x TENDE A $+\infty$ È UGUALE A $+\infty$ SE

PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE UN $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \geq x_0$ ALLORA $f(x) \geq M$.

<u>ESEMPIO</u> $f(x) = x^2$ E DIMOSTRO CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

DEVO DIMOSTRARE CHE

PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \geq x_0$ ~~ALLORA~~
ALLORA $x^2 \geq M$.

(SE $M = 1$ POSSO SCEGLIERE $x_0 =$

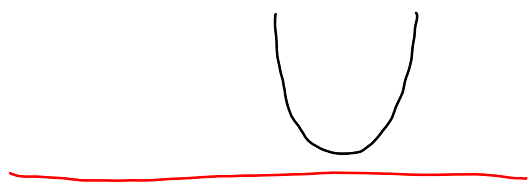
SE $x_0 = 0$ È VERO CHE PER $x \geq 0$ $x^2 \geq 1$ NO

SE PRENDO $x_0 = 1$ PER $x \geq 1$ $x^2 \geq 1$ SI)

TORNIAMO AL CASO GENERALE

HO FISSATO $M \in \mathbb{R}$ E VOGLIO PRODURRE x_0 TALE CHE PER $x \geq x_0$ SI ABBIA $x^2 \geq M$.

- SE $M \leq 0$ POSSO SCEGLIERE $x_0 = 0$ (1 VA BENE UGUALE) INFATTI PER $x \geq 0$ ABBIAMO $x^2 \geq 0 \geq M$.



- SE $M > 0$ POSSO SCEGLIERE $x_0 = \sqrt{M}$ INFATTI SE $x \geq \underset{\sqrt{M}}{\underset{\shortparallel}{x_0}}$ ALLORA $x^2 \geq M$

VARIANTI

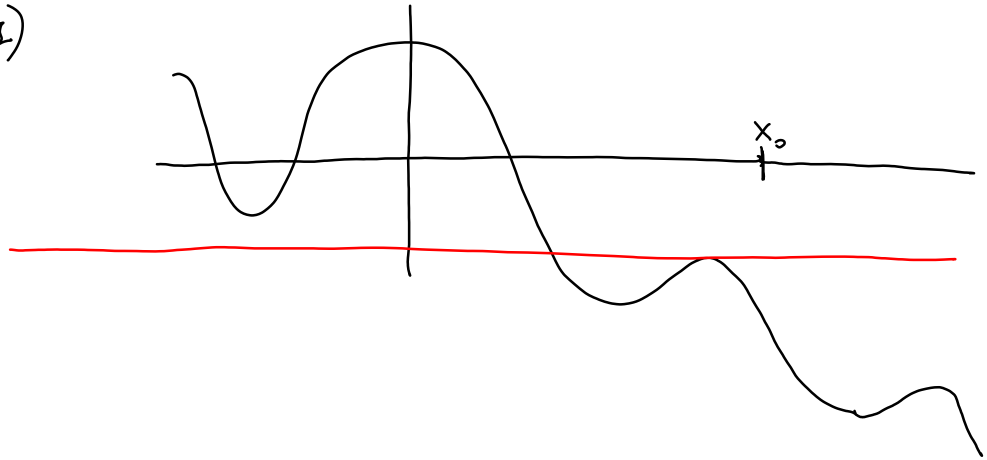
I $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

QUANDO x CRESCE $f(x)$ DIVENTA MOLTO NEGATIVA

II $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

III $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

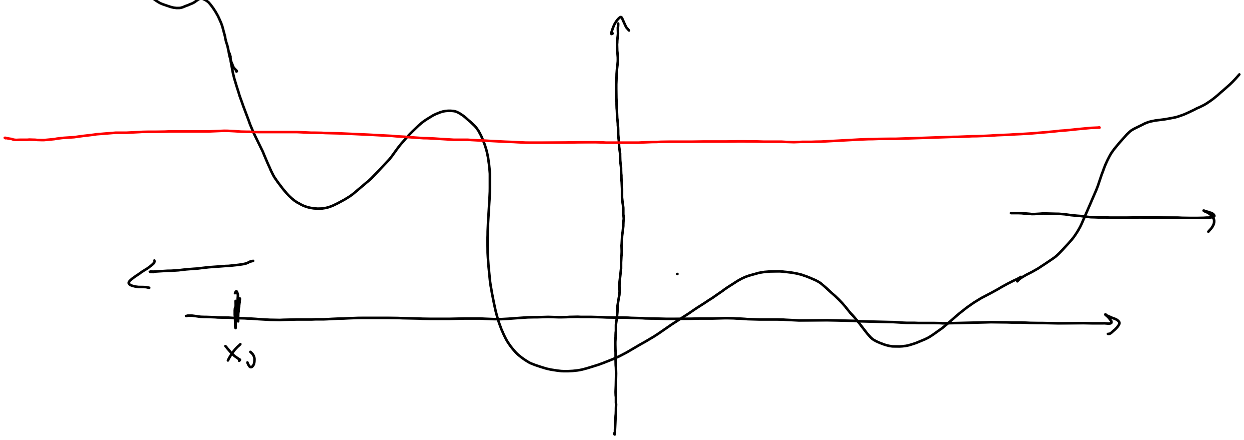
I)



PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \geq x_0$ ALLORA $f(x) \leq M$.

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

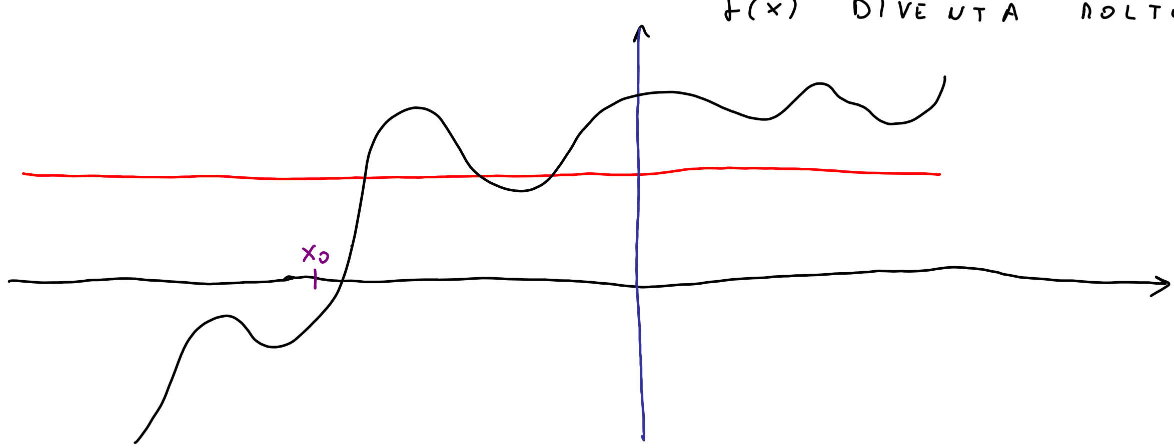
QUANDO x DIVENTA MOLTO NEGATIVO LA FUNZIONE DIVENTA GRANDE



PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \leq x_0$ ALLORA $f(x) \geq M$.

III) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

QUANDO x DIVENTA MOLTO NEGATIVO ANCHE $f(x)$ DIVENTA MOLTO NEGATIVO



PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \leq x_0$ ALLORA $f(x) \leq M$.

- $f(x) = x^3 - x^2$

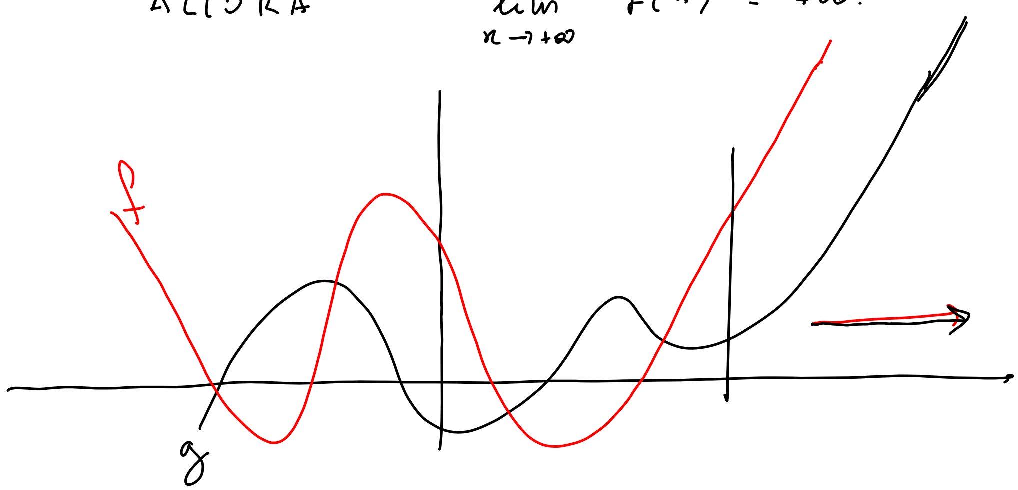
- I° OSSERVAZIONE $\qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

- II° OSSERVAZIONE $\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x^2 = +\infty$

- III° OSSERVAZIONE SE DA' UN CERTO PUNTO IN POI

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{E} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

ALLORA $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



$f(x)$ $\quad +\infty$

$\boxed{\text{SE } x \geq 2}$

- $f(x) = x^3 - x^2 \geq 2x^2 - x^2 \geq x^2 \to +\infty$

PER $x \geq 2$ $\qquad x \cdot x \cdot x \geq 2 \cdot x \cdot x$

QUINDI $\qquad f(x) = x^3 - x^2 \geq x^2 = g(x) \quad$ (PER $x \geq 2$)

E LA I°

PER LA III^{a} OSSERVAZIONE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

FATTO: • SE $\alpha > 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
$\alpha \in \mathbb{R}$.

Esempio $\lim_{x \to +\infty} x^{1/2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

• Se $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$ allora

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari } (x^2) \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

FUNZIONI RAZIONALI

UNA FUNZIONE RAZIONALE È UNA FUNZIONE CHE SI PUÒ SCRIVERE COME RAPPORTO DI DUE POLINOMI

$$\frac{x+3}{x+1} \qquad 1 + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$$

$$\frac{1}{x^3 - 3} \qquad x^2 + 1 = \frac{x^2+1}{1}$$

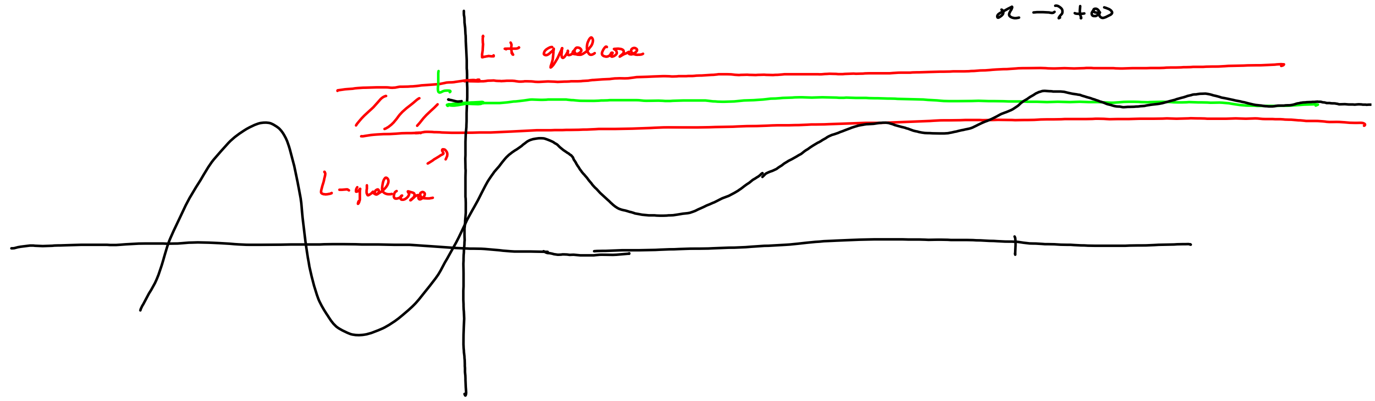
OSSERVAZIONE SUL LIMITE DI FUNZIONI RAZ. PER $x \to +\infty$

ESEMPIO $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$x = 1$

x	$f(x)$
1	2
10	1,1
100	1,01
1000	1,001.

VOGLIAMO DEFINIRE COSA VUOL DIRE CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$



VOGLIO FORMALIZZARE L'IDEA CHE QUANDO x DIVENTA GRANDE ALLORA $f(x)$ SI AVVICINA A L.

L'IDEA PER FORMALIZZARE QUESTO FATTO È QUESTA:

FISSO UN ERRORE (IL QUALCOSA DI PRIMA) E DICO CHE QUANDO x CRESCE LA funzione $f(x)$ SI AVVICINA A L CON AL MASSIMO QUELL'ERRORE FISSATO.

COMUNQUE FISSO UN NUMERO (CHE PENSO PICCOLO MA POSITIVO) E AFFERMO CHE PER x ABBASTANZA GRANDE LA DISTANZA TRA $f(x)$ e L È PIÙ PICCOLA DI QUESTO NUMERO.

PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \geq x_0$ ALLORA $L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$.

ESR. DEFINIRE COSA VUOL DIRE CHE $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

ESEMPIO $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ UTILIZZO LA DEF.

DEVO FAR VEDERE CHE PER OGNI $\varepsilon > 0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE SE $x \geq x_0$ ALLORA

$$1 - \varepsilon \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon$$

$\varepsilon = 0,1$ $\quad x_0$ COME LO POSSO SCEGLIERE

$x_0 = 1$

$\boxed{\text{SE } x \geq x_0 \text{ ALLORA } \boxed{0,9 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1,1}}$

SE $\boxed{x_0 = 10}$ E $x \geq \underset{10}{x_0}$ ALLORA $\boxed{0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{10} = 0,1}$

$$\boxed{0,9 \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1,1}$$

SE $\varepsilon > 0$ È QUALSIASI SCELGO $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

INFATTI SE ~~PERO~~ $x \geq x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

ALLORA $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_0} = \varepsilon$

$$\boxed{1 - \varepsilon \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon}$$

FATTO $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha < 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0}$$

$x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Se $n \in \mathbb{Z}$ $\quad n < 0$ $\quad$ allora $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n = 0$.