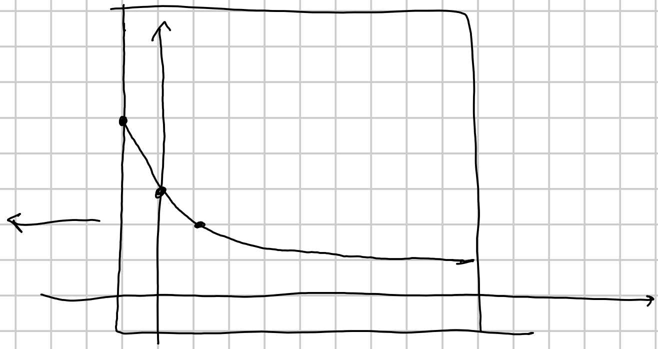
ESERC.



× $ax+b$

× ax^2+bx+c

ab^x+c

$\boxed{a\dfrac{1}{x+b}+c}$

$ab^{-x}+c$.

Per $0<b<1$ sono decrescenti

$$f(x) = \boxed{\frac{a}{x+b} + c}$$

$$f(x) = \frac{4}{x+2} + 1$$

$x=1$ $= \frac{4}{3} + 1$ $\boxed{= \frac{7}{3}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad c = 1$$

$$f(0) = 3 \qquad f(1) = 2$$

$$\frac{a}{b} + 1 = 3 \qquad \frac{a}{b+1} + 1 = 2$$

$$\frac{a}{b} = 2 \qquad \frac{a}{b+1} = 1$$

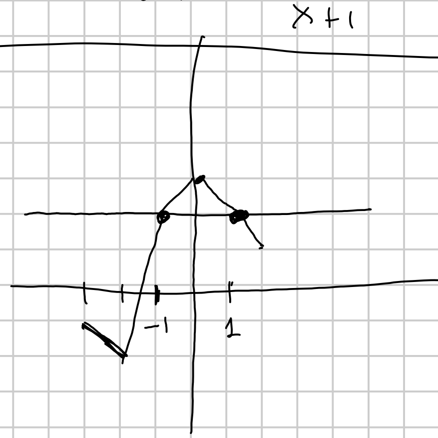
$$a = 2b \qquad 2b = b+1 \qquad b = 1$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + 1$$

CONTRO $\boxed{f(-1) = 5}$

ES. 2

a



$-3 \le x \le -2$

$f(x) = -x-4$

a) RISOLVERE $f(x) = 2$.
LE SOLUZIONI DI $f(x)=2$ SONO $x=1$ e $x=-1$.

$f(x) = a\, b^x + c$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad 0 < b < 1 \qquad c = 1$

$f(0) = 3 \qquad f(1) = 2$

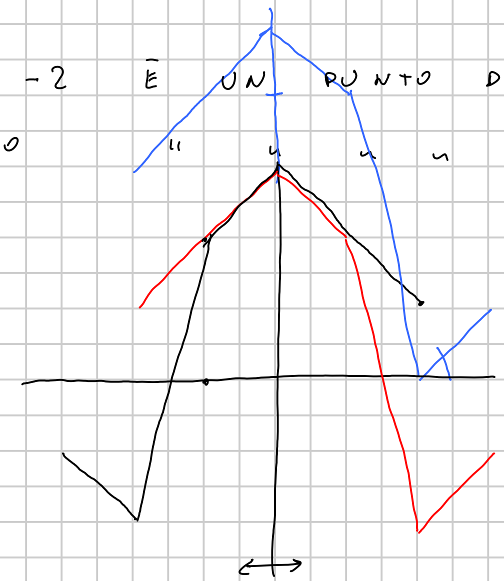
$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \qquad \boxed{f(-1) = 5}$

b) DETERMINARE PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

$x = -2$ È UN PUNTO DI MINIMO

$x = 0$ " " " " " MASSIMO.

c)



$h(x) = f(-x)$

$g(x) = f(-x) + 2 = h(x) + 2$

3) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

$f'(x) = 2x\, e^{-2x} + x^2 (-2)\, e^{-2x}$

$= 2\,(x - x^2)\, e^{-2x} = 2\, x(1-x)\, e^{-2x}$

il segno di f'

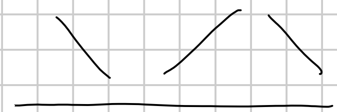
Per $x > 1$ $\quad f' < 0 \quad$ f è decrescente in $x \geq 1$

Per $1 > x > 0$ $\quad f' > 0 \quad$ f è crescente in $1 \geq x \geq 0$

Per $x < 0$ $\quad f' < 0 \quad$ f è decrescente in $x \leq 0$

QUINDI: 0 è un punto di minimo locale

1 è un punto di massimo locale.



- 1 non è un punto di massimo
e in particolare non esistono punti di massimo
perché ~~per~~ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{e^{-2x}}_{\downarrow \, +\infty} = +\infty$.

quindi la funzione assume valori grandi a piacere e quindi non ha punti di massimo.

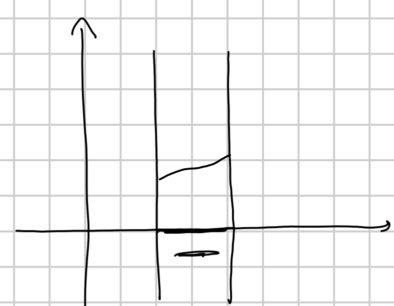
- 0 è un punto di minimo.

$$f(0) = 0 \qquad f(x) = \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{x^2}\ \underset{\substack{\vee \\ 0}}{e^{-2x}} \geq 0$$

QUINDI 0 è il valore minimo di f e $x=0$ è un punto di minimo.

ESERCIZIO 4

CALCOLARE L'AREA COMPRESA



$f(x) = x e^x$

f è positiva nell'intervallo $[1,2]$

$$\text{Area} = \int_1^2 x e^x \, dx = \left[x e^x \right]_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx =$$

$$= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2$$

(5)

a) $m' = \underbrace{\alpha}_{} m$

$$\boxed{m(t+1) = 2\, m(t)}$$

LE SOLUZIONI DI $m' = \alpha m$ SONO LE ~~EQUAZIO~~ FUNZIONI DELLA FORMA

$$f(t) = C \cdot e^{\alpha t}$$

$$\underline{f(t+1)} = C\, e^{\alpha(t+1)} = C\, e^{\alpha t + \alpha} = C\, e^{\alpha t} e^{\alpha}$$

$$= \underline{f(t)\, e^{\alpha}}$$

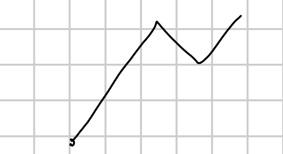
QUINDI $e^{\alpha} = 2$ QUINDI $\alpha = \log_e 2$

$$\boxed{m' = (\log_e 2)\, m}$$

$m = C\, 2^t$

$\underline{m' = 2 m}$ $\underline{m' = \alpha m}$

b) $m' = \underline{\underline{A(t)}} - B(t)$ /



$\downarrow$

$A(t) = (\log_e 2)\, m(t)$

$B(t) = \underline{B}$ $m'(t) = (\log_e 2)\, m(t) - B.$

$$\int_0^{m'} B = B = \underline{\underline{1}} \quad \boxed{m' = (\log_e 2)\, m(t) - \underline{1}}$$

DEFINIZIONE DI SPAZIO DI PROBABILITÀ

Ω UN INSIEME FINITO CHE SI CHIAMA LO SPAZIO DEGLI EVENTI

$P : \Omega \to [0, 1]$ UNA FUNZIONE CHE SI CHIAMA PROBABILITÀ

SE $\Omega = \{ e_1 ; \dots ; e_n \}$

- $\boxed{P(e_1) + \dots + P(e_n) = 1}$

GLI ELEMENTI DI Ω SI CHIAMANO EVENTI SEMPLICI

SE $A \subset \Omega$ SI CHIAMA EVENTO COMPOSTO.

<u>Es</u> SE LANCIO UN DADO

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$P(1) = P(2) = \dots = \frac{1}{6}$$

$A = \{ 2, 4, 6 \}$ È UN ESEMPIO DI EVENTO COMPOSTO

$$P(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DEFINIZ.}}}{=} P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Ω e P SONO UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ

$A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B)$ NON È SEMPRE $P(A) + P(B)$

$P(A \cap B)$

SE $\boxed{A = B}$ $\quad P(A \cup B) = P(A)$

OSSERVAZIONE $\quad$ Se $A, B \subset \Omega$

$$\boxed{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)}$$

$A = \{ e_1 \; e_2 \; e_3 \}$

$B = \{ e_1 \; e_4 \; e_5 \; e_6 \}$

$A \cup B = \{ e_1 \; e_2 \; e_3 \; e_4 \; e_5 \; e_6 \}$

$A \cap B = \{ e_1 \}$

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(e_1) + \cdots + P(e_6) + P(e_1)$$

$$P(A) + P(B) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_1) + P(e_4) + P(e_5) + P(e_6)$$

DEFINIZIONE

UN EVENTO COMPOSTO $A \subset \Omega$ SI DICE CHE HA PROBABILITÀ NULLA SE $P(A) = 0$.

$A, B \subset \Omega$ SI DICONO INCOMPATIBILI SE LA PROBABILITÀ CHE I DUE EVENTI SI VERIFICHINO CONTEMPORANEAMENTE È NULLA

OVVERO $\quad \boxed{P(A \cap B) = 0}$

OSSERVAZIONE $\quad$ SE A E B SONO INCOMPATIBILI ALLORA $\quad \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

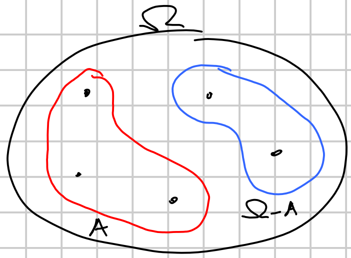
INFATTI

$$P(A \cup B) + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{P(A \cap B)} = P(A) + P(B)$$

ESEMPIO DI EVENTI INCOMPATIBILI

$A \subset \Omega \qquad B = \underline{\Omega \setminus A}$ Omega senza A

$= \{x \in \Omega$ tali che $x \notin A\}$



$A \cup B = \Omega$

$A \cap B = \underline{\underline{\emptyset}}$

$P(A \cap B) = 0$

$\underline{\underline{P(A)}} + \underline{\underline{P(B)}} = P(A \cup B) = \underline{\underline{1}}.$

ESEMPIO

LANCIAMO UN DADO 3 VOLTE

ABBIAMO $216 = 6 \times 6 \times 6$ EVENTI POSSIBILI

$\Omega = \{ (1,1,1) \quad (1,1,2) \quad \ldots\ldots \}$

OGNI EVENTO HA PROBABILITÀ $\frac{1}{216}$

- VOGLIAMO CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE ESCA ALMENO UN 1

- LA PROBABILITÀ CHE ESCA SEMPRE 1.

~~B~~ 1, 1, 1 $\qquad \frac{1}{216} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

1 1 1 $\quad$ 1 1 2 $\quad$ 1 1 3 $\qquad$ 1 2 3

SIA A L'INSIEME DELLE TERNE DI LANCI IN CUI ESCE ALMENO UN 1.

CONSIDERIAMO $\Omega \setminus A = \underline{B}$ L'EVENTO COMPLEMENTARE.

B È L'INSIEME DELLE TERNE IN CUI ESCONO SOLO 2, 3, 4, 5, 6.

$$\#(B) = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$P(B) = \frac{125}{216}$$

$$\boxed{P(A) + P(B) = 1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}$$

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ I RISULTATI DI UN SINGOLO LANCIO

$$\Omega = \underline{\Omega_1 \times \Omega_1 \times \Omega_1} = \{(a, b, c) \text{ TALI CHE } a \in \Omega_1,\ b \in \Omega_1,\ c \in \Omega_1\}$$

$$A = \{(a, b, c) \text{ TALI CHE } a = 1 \text{ o } b = 1 \text{ o } c = 1\}$$

$$\underline{B} = \Omega \setminus A = \underline{B_1 \times B_1 \times B_1} = \{(a, b, c) : a \in B_1,\ b \in B_1,\ c \in B_1\}$$

$$B_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

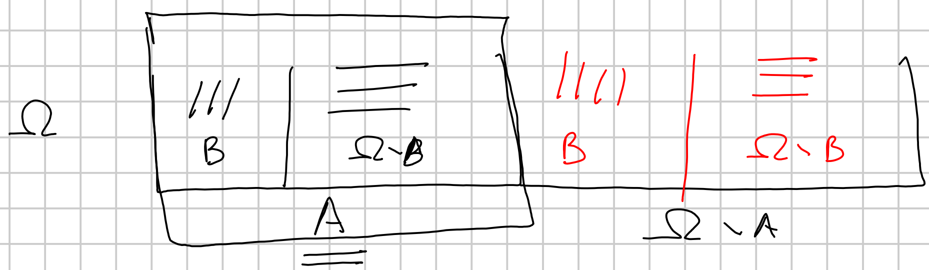
$$P(B_1 \times B_1 \times B_1) = P(B_1) \times P(B_1) \times P(B_1)$$

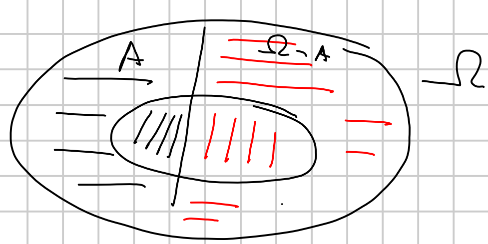
$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

EVENTI INDIPENDENTI

SIANO A e B due eventi

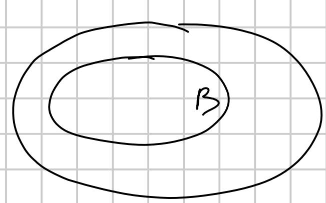
VOGLIAMO ~~DIRE~~ DEFINIRE COSA VUOL DIRE ESSERE INDIPENDENTI. INTUITIVAMENTE VUOL DIRE CHE IL VERIFICARSI NON INCIDE SULLA PROBABILITÀ DEL VERIFICARSI DI B.





SUPPONIAMO CHE SIANO EVENTI EQUIPROBABILI

$$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega}$$



LA PROBABILITÀ DI B UNA VOLTA CHE A SI È VERIFICATO

$$\frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{\# B}{\# \Omega}$$

$$\frac{\#(A \cap B)}{\#(\Omega)} = \frac{\#(B)}{\#(\Omega)} \times \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

$$\boxed{\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}}$$

DEFINIZIONI DICIAMO CHE A E B SONO INDIPENDENTI SE

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$