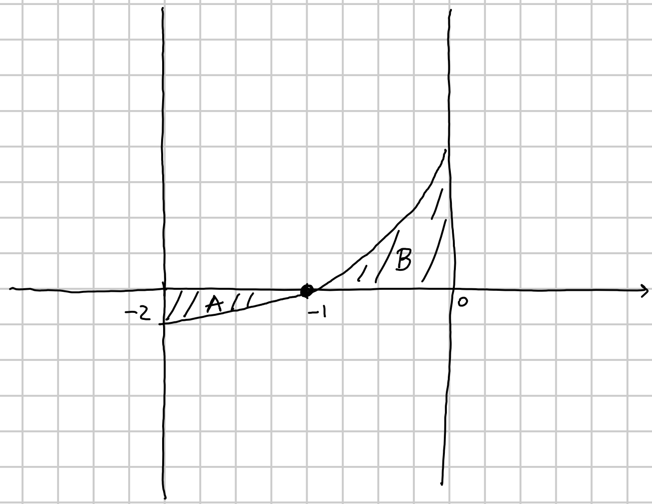
ESERCIZIO 57



$$f(x) = e^{x}(x+1)$$

$f(x) > 0$ per $x > -1$

$f(x) = 0$ per $x = -1$

$f(x) < 0$ per $x < -1$

$$f'(x) = e^{x}(x+1) + e^{x} = e^{x}(x+2)$$

$f'(x) > 0$ per $x > -2$

$f'(x) = 0$ per $x = -2$

$f'(x) < 0$ per $x < -2$

Area $= A + B$ NON È $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = -A \qquad \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = B$$

$$\int_{-2}^{-1} \underset{f}{e^{x}}\,\underset{G}{(x+1)}\,dx = \Big[e^{x}(x+1)\Big]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^{x}$$

$F = e^{x}$ $\quad G' = 1$

$$= \Big[e^{x}(x+1) - e^{x}\Big]_{-2}^{-1} = \Big[x e^{x}\Big]_{-2}^{-1}$$

$$A = -\Big[x e^{x}\Big]_{-2}^{-1} = -\left(-e^{-1} - (-2e^{-2})\right) = \underline{\underline{e^{-1} - 2e^{-2}}}$$

$$B = \int_{-1}^{0} e^{x}(x+1)\,dx = \Big[x e^{x}\Big]_{-1}^{0} = 0 + \underline{\underline{e^{-1}}}$$

$$A + B = 2e^{-1} - 2e^{-2}$$

ESEMPIO DECADIMENTO DI UNA SOSTANZA RADIOATTIVA

$y(t)$ = LA QUANTITÀ DELLA SOSTANZA.

$$\boxed{\boxed{y'(t) = -\alpha\, y(t)}} \qquad \boxed{y' = f(t)}$$

QUI NON CONOSCIAMO NÉ IL TERMINE DI DESTRA NÉ IL TERMINE DI SINISTRA

SAPPIAMO $y(0) = y_0$

E SUPPONIAMO DI SAPERE ANCHE α.

$$\begin{cases} y' = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
SAPENDO VELOCITÀ. CALCOLARE LA POSIZIONE

$$\begin{cases} y'' = f(t) \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$
SAPENDO L'ACCELERAZIONE CALCOLARE LA POSIZIONE

$$\begin{cases} y'(t) = -\alpha y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
SAPPIAMO UNA RELAZIONE TRA y' E y_0

ESEMPIO DELLA SOSTANZA CHE DECADE

TUTTI QUESTI SONO ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'ESEMPIO PIÙ GENERALE DI EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE NOI CONSIDEREREMO È UN'EQUAZIONE

$$y^{(n)}(t) = F\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

LA DERIVATA n-VOLTE

$$y''(t) = \underbrace{e^{t}\, y(t)^2 + y'(t) + 5t^2}_{\displaystyle F(\underline{t}, \underline{y}, \underline{y'})}$$

TEOREMA (CAUCHY - KOVALESKAYA)

Se F "è abbastanza buona" (in particolare tutte le nostre funzioni sono abbastanza buone)

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0' \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

ESISTE **UN'UNICA** FUNZIONE $y(t)$ CHE RISOLVE QUESTO SISTEMA

PER ESEMPIO TORNANDO AL PROBLEMA DELLA SOSTANZA CHE DECADE

$$\begin{cases} \boxed{y'(t) = -\alpha y(t)} \\ \boxed{y(0) = y_0} \end{cases}$$

c'è un'unica funzione che ha queste proprietà

NEL NOSTRO CASO $\boxed{y = A e^{-\alpha t}}$ con A costante a piacere

RISOLVONO $y' = A \cdot (-\alpha) e^{-\alpha t}$ $\quad t \longrightarrow \underline{\underline{-\alpha t}} = s \longrightarrow \underline{e^{s}}$

$= -\alpha y$

INOLTRE SE IMPONGO $y(0) = y_0$ ottengo

$$y(0) = A e^{-\alpha \cdot 0} = A = y_0$$

LA SOLUZIONE È $\boxed{y(t) = y_0 e^{-\alpha t}}$

ESERCIZIO

ABBIAMO UNA SOSTANZA CHE DECADE

SAPPIAMO CHE $y(0) = 2$ chili $\quad y(1) = 1$ chilo

Determinare $y(t)$ per ogni t.

$$y'(t) = -\alpha\, y(t) \qquad \alpha > 0$$

UNA FUNZIONE $\boxed{y(t) = A\, e^{-\alpha t}}$ RISOLVE QUESTA EQUAZIONE

$$y'(t) = A(-\alpha)\, e^{s}$$

$$= -\alpha \cdot \underbrace{A \cdot e^{-\alpha t}}$$

$$= -\alpha\, y(t)$$

$e^{-\alpha t}$

$$t \longrightarrow -\alpha t = s \longrightarrow e^{s}$$

$y(0) = 2$

$= A\, e^{0} = A$

$\boxed{A = 2}$

$y(1) = 1$

$= A\, e^{-\alpha}$

$2\, e^{-\alpha} = 1 \qquad e^{\alpha} = 2 \qquad \alpha = \log 2$

$$y(t) = 2\, e^{-(\log 2)\, t} = 2 \cdot 2^{-t}$$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SOSTANZA CHE DECADE E SUPPONIAMO DI AVERE UN "PRODUTTORE" DI NUOVA SOSTANZA RADIOATTIVA.

α

C = nuova sostanza prodotta nell'unità di tempo.

$$\begin{cases} \boxed{y' = \underbrace{-\alpha y} + C} \\ \boxed{y(0) = y_0} \end{cases}$$

CON α e C DUE COSTANTI

$\left(\alpha = 1/2 \qquad C = 1\right)$

DATO INIZIALE

QUANTITÀ AL TEMPO ZERO

SOLUZIONE

$$y' = \boxed{-\alpha \left(\underline{y - \frac{c}{\alpha}} \right)} \qquad y(0) = y_0$$

OSSERVAZIONE $\qquad z(t) = y(t) - \frac{c}{\alpha}$

$$z'(t) = y'(t) = -\alpha z$$

$$\boxed{z'(t) = -\alpha z(t)} \qquad z(t) = A e^{-\alpha t}$$

QUINDI $\qquad \boxed{y(t) = A e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}}$

$$y(0) = y_0 \qquad A + \frac{c}{\alpha} = y_0$$

$$A = \left(y_0 - \frac{c}{\alpha} \right)$$

$$\boxed{y(t) = \left(y_0 - \frac{c}{\alpha} \right) e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}}$$

QUESTA È LA SOLUZIONE: SE α, c, y_0 SONO FORNITI

HO CALCOLATO $y(t)$.

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \left(y_0 - \frac{c}{\alpha} \right) \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\to 0} + \frac{c}{\alpha} = \boxed{\frac{c}{\alpha}}$$

PER $t \to +\infty$ $\qquad y \sim \frac{c}{\alpha} \qquad y \sim m.$

TRA TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI DI

$$\boxed{y' = -\alpha y + c} \qquad y' = 0 \qquad y = \frac{c}{\alpha}$$

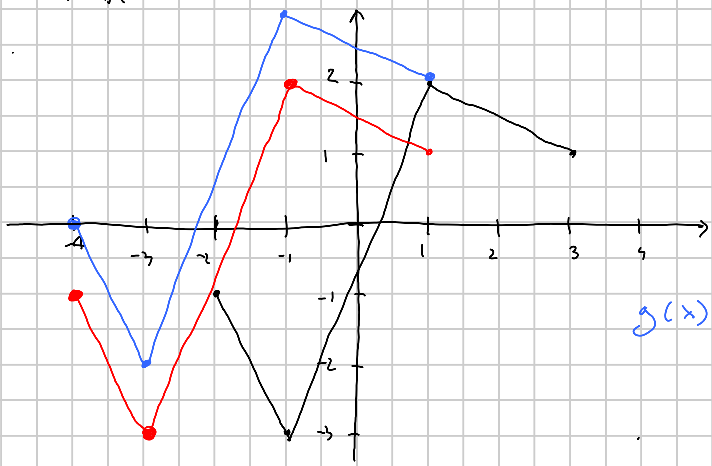
CI SONO ANCHE DELLE SOLUZIONI COSTANTI

DELLE SOLUZIONI IN CUI $y' = 0$.

$$-\alpha y + c = 0 \qquad \boxed{y = \frac{c}{\alpha}}$$

ESERCIZIO 59

$f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$



$g_1(x)$

$g_1(-4) = f(-4+2) =$
$= f(-2) = -1$

$g_1(-3) = f(-1) = 3$

$g_1(-1) = 2$

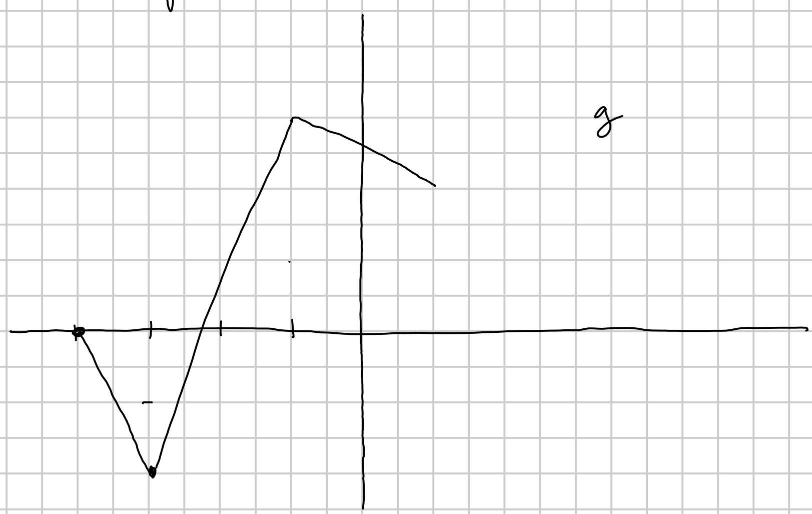
$g_1(1) = 1$

$g(x) = g_1(x) + 1$

SIA $g(x) = f(x+2) + 1$ $\qquad g : [-4, 1] \to \mathbb{R}$

OSS Se $x \in [-4, 1]$ $\quad x+2 \in [-2, 3]$ e quindi ha senso calcolare $f(x+2)$ e quindi $f(x+2)+1$.

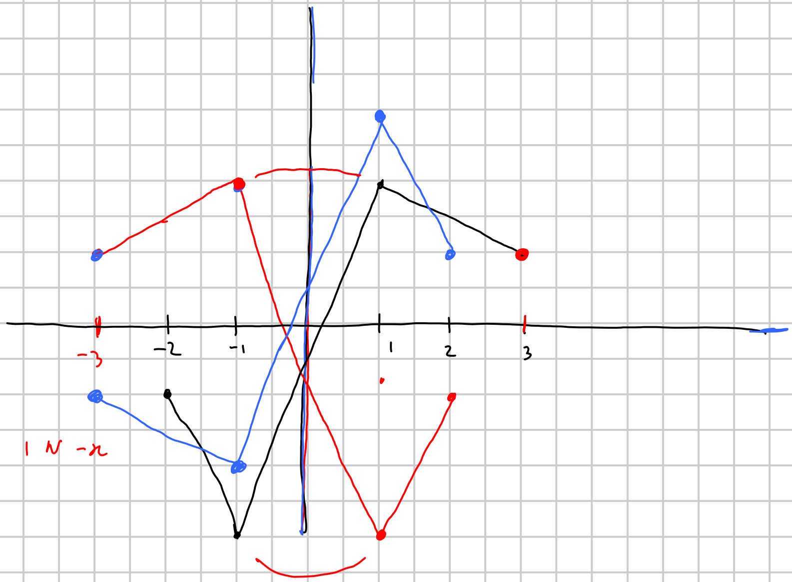
$g_1(x) = f(x+2)$ $\qquad$ NEL PUNTO x QUESTA FUNZIONE g_1 ASSUME IL VALORE CHE LA FUNZIONE f ASSUME IN $x+2$.



$h_1(-3) = f(3)$

h_1 CALCOLATA IN x VALE TANTO QUANTO f CALCOLATA IN $-x$

$h(x) = -h_1(x)$



$h(x) = -f(-x)$ $\qquad h: [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$h_1(x) = f(-x)$ $\qquad h_1: [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ PER $x \in [-3, 2]$, $-x \in [-2, 3]$

ESR. 66 $\qquad$ I ESR COMPITINO DEL 2019

$$N(t) = \underline{\underline{N_0}} + 10t + 2t^2$$

SAPENDO CHE PER $t = 2$ $N(2) = 1028$ CALCOLARE N_0.

$$1028 = N(2) = N_0 + 20 + 8 = N_0 + 28 \qquad N_0 = 1000$$

$$N(t) = 1000 + 10t + 2t^2$$

- TROVA DOPO QUANTO TEMPO LA NUMEROSITÀ È RADDOPPIATA.

QUANDO È CHE $N(t) = 2\,N(0) = 2 \cdot N_0 = 2000$

$$2000 = 1000 + 10t + 2t^2$$

$$\boxed{2t^2 + 10t - 1000 = 0}$$

$$t^2 + 5t - 500 = 0$$

$$\Delta = 25 + 4 \cdot 500 = 25 + 2000 = 2025$$

$$\boxed{t_1 = \frac{-5 + \sqrt{2025}}{2}} \qquad \cancel{t_2 = \frac{-5 - \sqrt{2025}}{2}} < 0$$

$$t_1 = \frac{-5 + 45}{2} = 20.$$

58

$$f(0) = 0 \qquad f'(t) = \boxed{te^t}$$

VOGLIAMO CALCOLARE LA PRIMITIVA DI xe^x

$$\int_0^x \underset{G}{t}\,\underset{f}{e^t}\,dt = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^1 1 \cdot e^t\,dt =$$

$$= \left[te^t\right]_0^x - \left[e^t\right]_0^x$$

$$= xe^x - 0 - e^x + 1$$

$$g(x) = xe^x + 1 - e^x \qquad g(0) = 0 + 1 - 1 = 0$$

$g(x)$ è una primitiva di xe^x

le altre primitive sono $f(x) = C + g(x)$

IMPONGO $f(0) = 0$ e $f(0) = C + g(0) = 0$

$$= C + 0 = 0$$

$$C = 0$$

QUINDI $f(x) = xe^x + 1 - e^x$