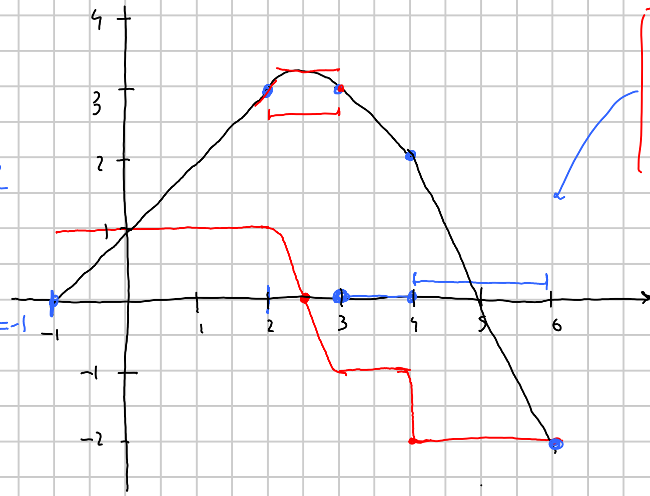
LEZIONE 15 NOVEMBRE

ES. 42

TRA $x = -1$ e $x = 2$ f è una retta di pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{2-(-1)} = 1$

La derivata in questo tratto è 1

Tra $x = 3$ e $x = 4$ è circa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{4-3} = -1$

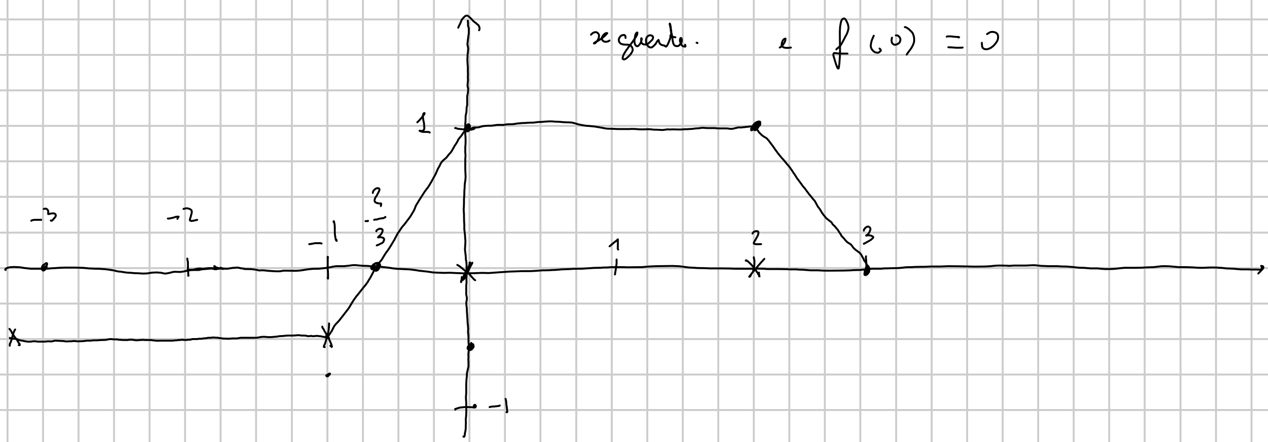


TRA $X = 4$ e $X = 5$ è circa $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-2}{6-4} = -2$

Disegna un grafico approssimativo di $f'(x)$

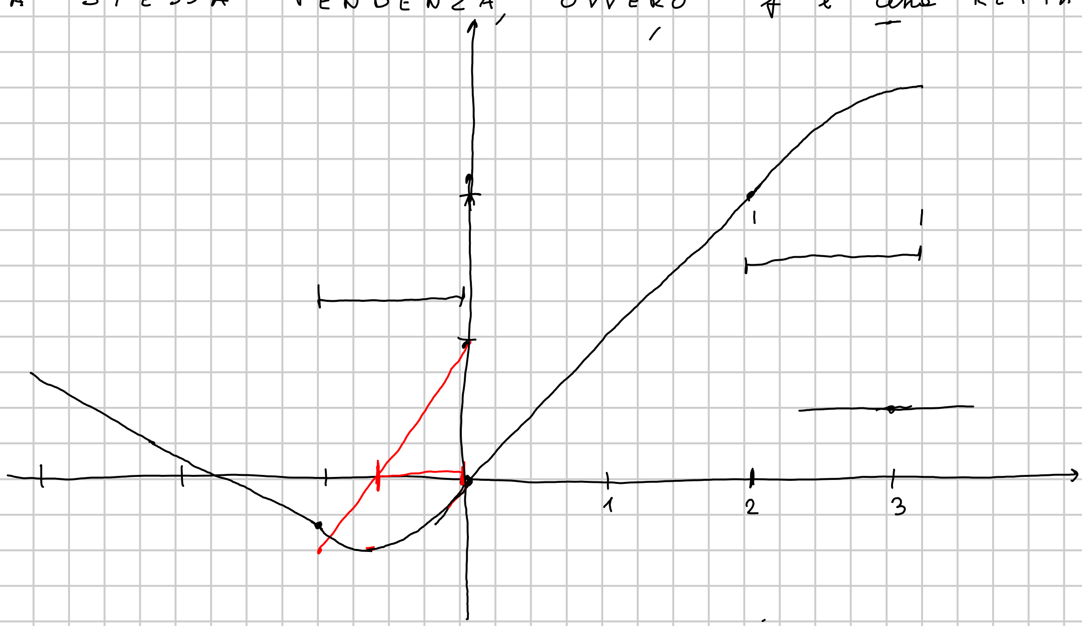
ES. 43

Il grafico della derivata di f è il seguente. e $f(0) = 0$

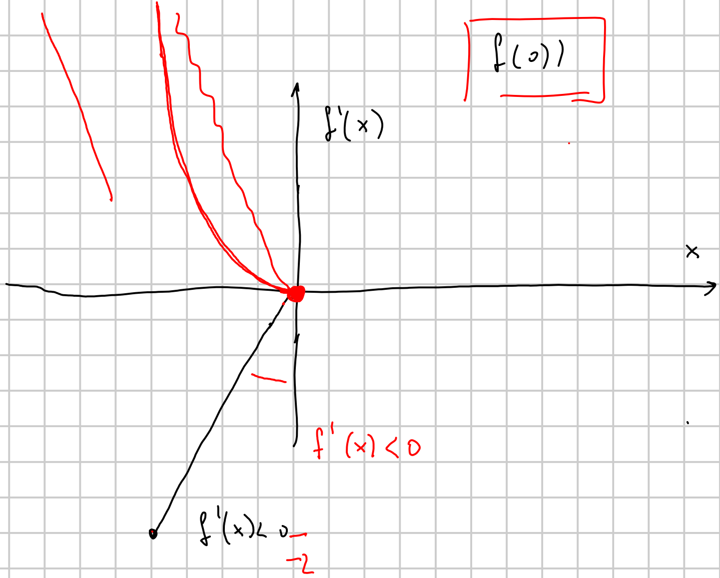


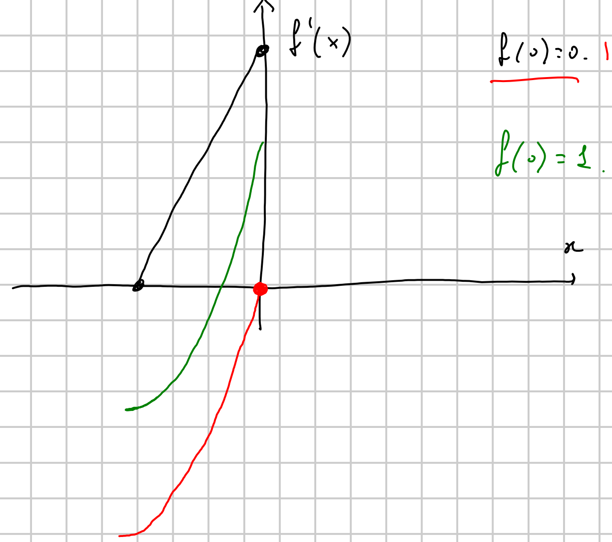
I° OSS TRA 0 e 2 e -3 e -1 LA DERIVATA DI f È COSTANTE, OVVERO f IN QUESTI TRATTI HA SEMPRE LA STESSA PENDENZA, OVVERO f è una RETTA

$f(0) = 0$



$f(0))$





ES. 44

(1) $\quad \underline{f(x) = x+1} \qquad \underline{g(x) = x^2}$

$$h(x) = f(g(x)) \qquad k(x) = g(f(x))$$

$$h(0) = f(\underline{g(0)}) = f(0) = 1$$

$$k(0) = g(\underline{f(0)}) = g(1) = 1$$

$$h(1) = f(\underline{g(1)}) = f(1) = 2$$

$$k(1) = g(\underline{f(1)}) = g(2) = 4$$

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \underline{x^2+1}.$$

$$f(y) = y+1 \quad \text{per} \quad y = x^2$$

$$k(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = \underline{x^2+2x+1}$$

(3) $\quad f(x) = e^{x} + e^{2x} \qquad g(x) = \log(x)$

$$f(g(x)) = f(\log x) = e^{\log x} + e^{2\log x}$$

$$= x + \left(e^{\log x}\right)^2 = x + x^2$$

$$f(g(x)) = \underline{\underline{f}}(\log x) = e^{\log x} + e^{2\log x} = x + \left(e^{\log x}\right)^2$$

$$f(y) \quad \text{con} \quad y = \log x. \qquad = x + x^2$$

$$\| $$

$$e^y + e^{2y}$$

$e^{a} = b$

$a = \log_e b$

$e^{\log_e b} = b$

$$\boxed{(e^b)^c = e^{bc}}$$

$$g(f(x)) = g'(e^x + e^{2x}) = \boxed{\log(\underline{e}^x + e^{2x})}$$

$$= \log\left(e^x(1+e^x)\right) = \underline{\log(e^x)} + \log(1+e^x)$$

$$= \underline{x + \log(1+e^x)}$$

ES. 45

$f(x) = x^4 + x^2$ $\qquad$ $g(x) = \log(x)$

$f'(x) = 4x^3 + 2x$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{x}$

$h(x) = f(g(x))$ $\qquad$ $k(x) = g(f(x))$

CALCOLARE LE DERIVATE DI h E k

Se $\quad h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = \underline{g'(x)} \quad f'(y) \quad \text{con} \quad y = g(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x}\left(4y^3 + 2y\right) \quad \text{con} \quad y = \log x$$

$$= \frac{1}{x}\left(4(\log x)^3 + 2(\log x)\right)$$

Se $\quad k(x) = g(\underline{f(x)})$

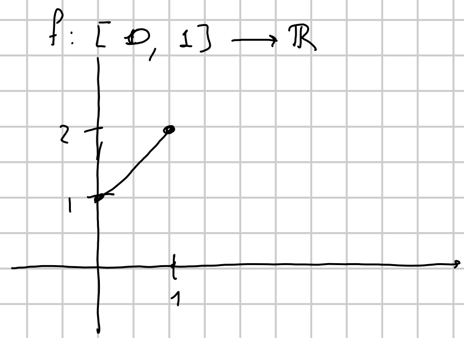
$$k'(x) = f'(x) \cdot g'(y) \quad \text{con} \quad y = \underline{f(x)}$$

$$= (4x^3 + 2x)\frac{1}{y} = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2} = \frac{4x^2 + 2}{x^3 + x}$$

INTEGRALI

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

ESEMPIO $f(x) = x + 1$ $\quad f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$



VOGLIO DEFINIRE L'INTEGRALE

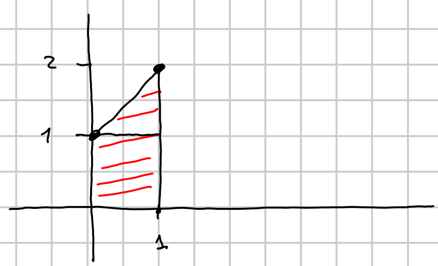
$$\int_0^1 f(x) \, dx$$

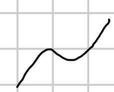
DELLA FUNZIONE f NELL'INTERVALLO $[0, 1]$

IDEA INTUITIVA $\int_0^1 f(x) \, dx$ è l'area compresa tra l'asse delle x e il grafico

Nell'esempio

$$\int_0^1 f(x) \, dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



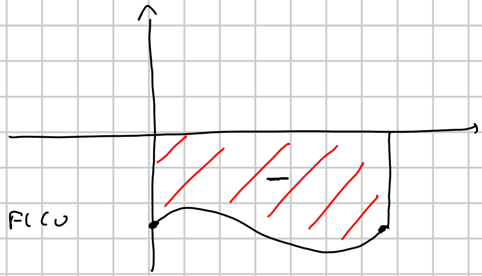


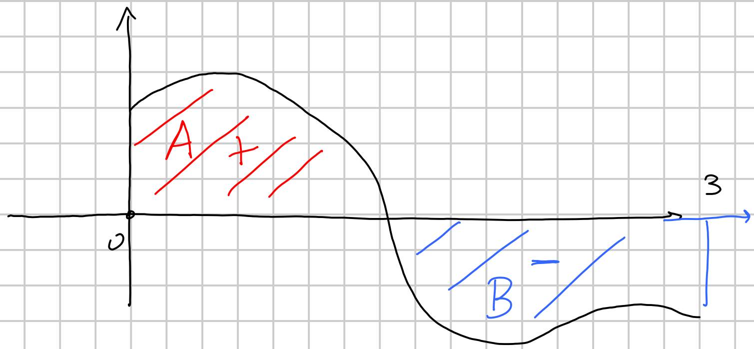
1° OSSERVAZIONE l'area non l'abbiamo definita, o perlomeno non la sappiamo calcolare per f più complicate di quella dell'esempio.

DIRE CHE L'INTEGRALE È L'AREA SOTTO IL GRAFICO AIUTA L'INTUIZIONE MA NON È UNA DEFINIZION

2° OSSERVAZIONE Se la funzione è negativa anche questa definizione intuitiva va resa più precisa

L'INTEGRALE È MENO L'AREA DELLA REGIONE COMPRESA TRA L'ASSE DELLE x E IL GRAFICO

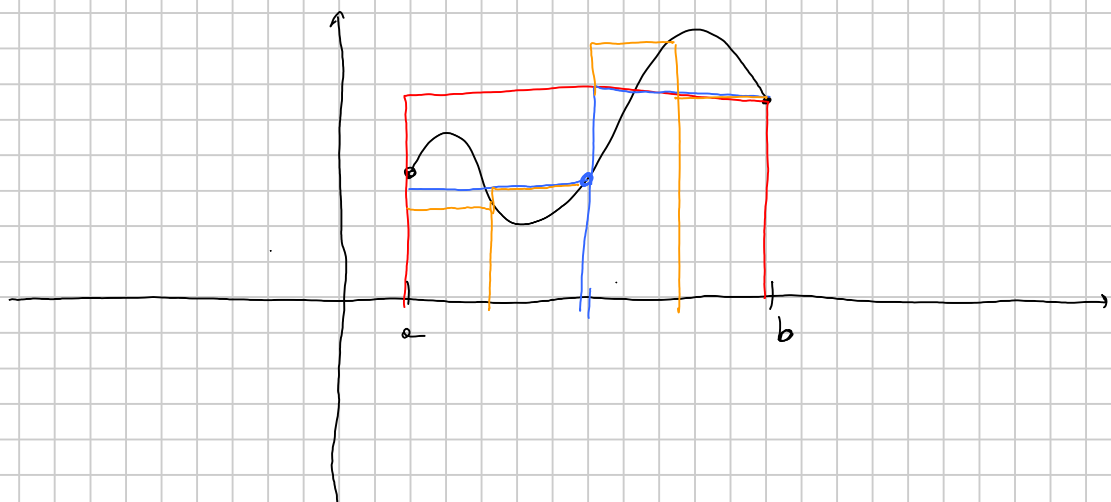




IN QUESTO ESEMPIO L'INTEGRALE

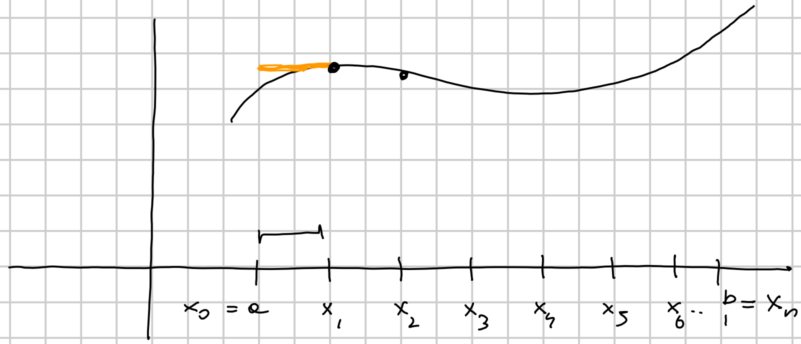
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \text{Area della regione A} - \text{Area della regione B}.$$

COME RENDERE PIÙ PRECISA LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE



PER APPROSSIMARE IL VALORE DELL'AREA DIVIDO IL SEGMENTO $[a, b]$ IN n PARTI UGUALI

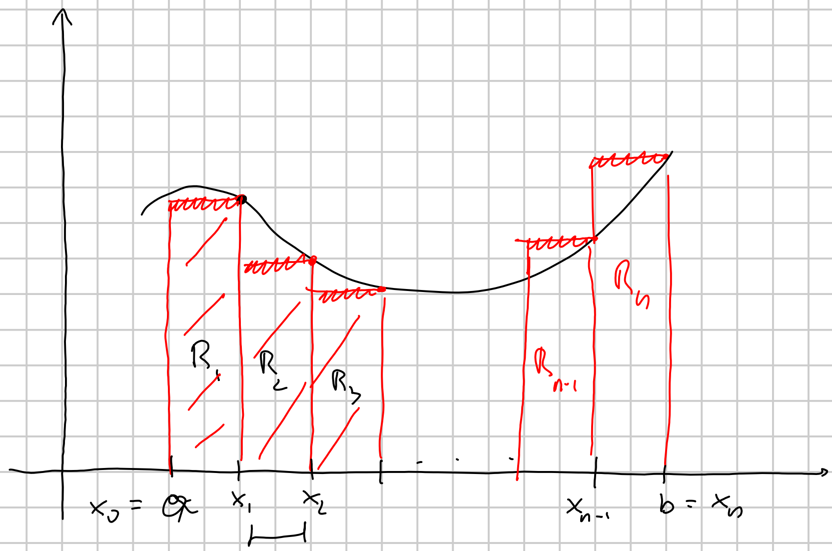
E DO UN NOME AGLI ESTREMI DEGLI INTERVALLI PICCOLI IN CUI HO DIVISO L'INTERVALLO GRANDE



$a = x_0$ $\quad x_1$ $\quad x_2$ $\quad x_n = b$

$$x_1 - x_0 = \frac{b-a}{n} = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$$

NELL' INTERVALLO TRA x_i e x_{i+1} APPROSSIMO LA FUNZIONE CON LA FUNZIONE COSTANTE CHE VALE $f(x_{i+1})$



L'AREA SOTTO LA NUOVA FUNZIONE (QUELLA ROSSA) LA SAPPIAMO CALCOLARE

$$\text{Area } R_i = \text{base} \times \text{altezza} = \frac{b-a}{n} \cdot f(x_i)$$

Rettangolo sopra $[x_{i-1} \quad x_i]$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) = I(n)$$

DEFINIZIONE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} I(n)$$

NOTA: NON SEMPRE QUESTO LIMITE ESISTE.

ESISTE SE LA FUNZIONE È CONTINUA E

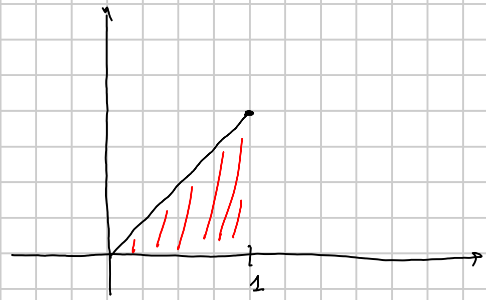
IN PARTICOLARE ESISTE PER LE FUNZIONI CHE

CONSIDERIAMO NOI x^α e^x $\log$

PERÒ È IMPORTANTE CHE SIANO DEFINITE IN TUTTO L'INTERVALLO ESTREMI INCLUSI

ESEMPIO

$$\int_0^1 x \, dx$$

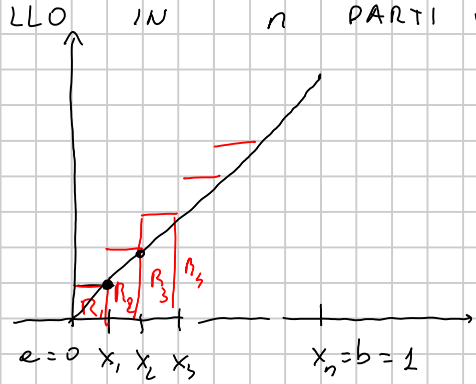


Aree $= \frac{1}{2}$

PROVIAMO AD IMPLEMENTARE LA DEFINIZIONE DATA SOPRA

1° PASSO DIVIDO L'INTERVALLO IN n PARTI UGUALI

$$X_i := \frac{i}{n}$$



$$x_1 = \frac{1}{n} \quad x_2 = \frac{2}{n} \quad x_3 = \frac{3}{n}$$

$$I(n) = \text{AREA}(R_1) + \text{AREA}(R_2) + \dots + \text{AREA}(R_n)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\frac{3}{n} + \frac{1}{n}\frac{4}{n} + \dots + \frac{1}{n}\frac{n}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\boxed{1 + 2 + 3 + \dots + n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}$$

$$I(n) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n} \to 0$$

$$\lim_{\longrightarrow} I(n) = \frac{1}{2}$$

$$S = 1 + 2 + 3 \qquad + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \qquad + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) \qquad + (n+1)$$

$$= (n+1)n$$

$$S = 1 + 2 \qquad + 100$$

$$S = 100 + 99 \qquad + 1$$

$$2S = 101 + 101 + \cdot \cdot \cdot \cdot + 101$$

$$= 101 \cdot 100$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2S = 100 \cdot 101$$

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$