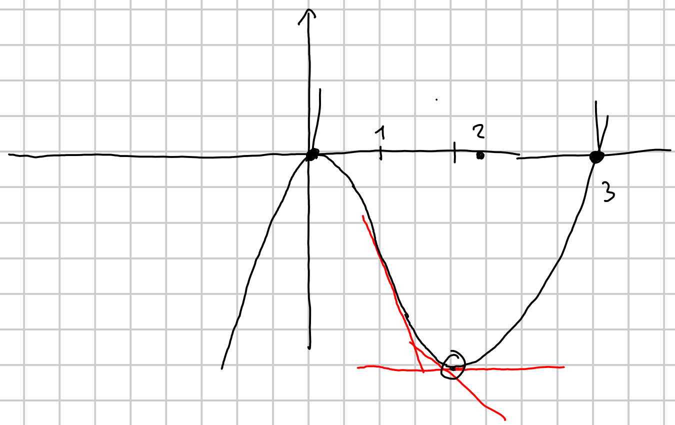
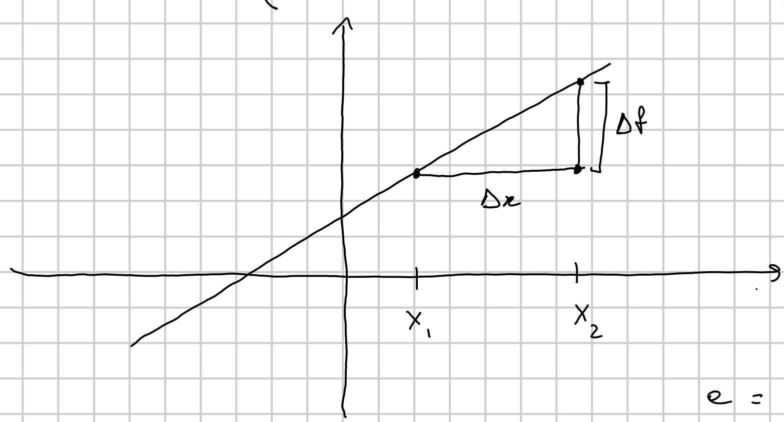
LEZIONE 2 NOVEMBRE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$



x	$f(x)$
-1	-4
0	0
1	-2
2	-4
3	0
4	16

VOGLIAMO COSA SIA LA PENDENZA DI UNA FUNZIONE (SI CHIAMA DERIVATA).



$f(x) = a x + b$

a = coeff angolare

è la pendenza della retta.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

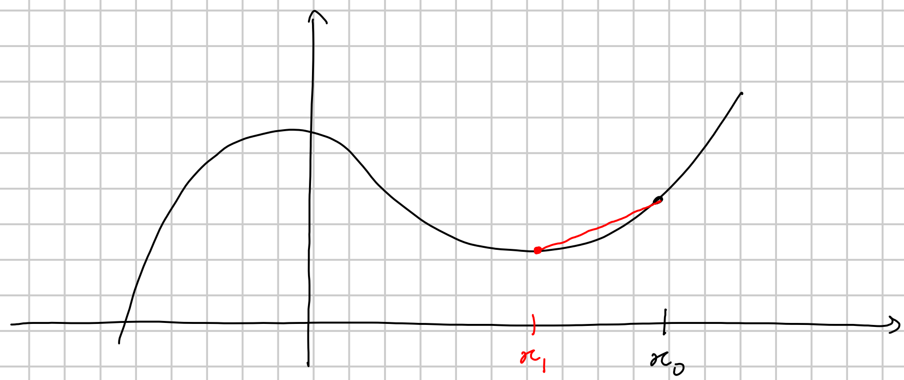
IL CASO DI UNA FUNZIONE QUALSIASI $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PRIMA POSSIBILITÀ POSSIAMO DEFINIRE LA PENDENZA MEDIA IN UN INTERVALLO $[x_1, x_2]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

NEL CASO DI UNA FUNZIONE QUALSIASI QUESTO VALORE DIPENDE DALL'INTERVALLO SCELTO

L'ALTRA POSSIBILITÀ È DEFINIRE UNA PENDENZA PUNTUALE IN UN PUNTO x_0



CALCOLO AL VARIARE DI x_1

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

E SPOSTO x_1 VICINO A x_0

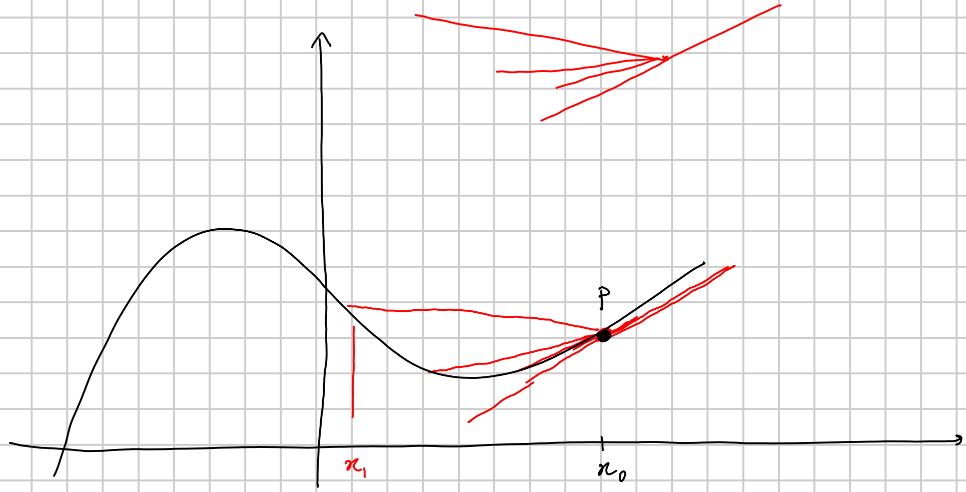
$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

SE TALE LIMITE ESISTE IL VALORE CHE OTTENIAMO LO CHIAMIAMO LA PENDENZA DI f IN x_0, O PIÙ COMUNEMENTE LA DERIVATA DI f IN x_0.

E SI INDICA IN VARI MODI

$$f'(x_0) \qquad \dot{f}(x_0) \qquad (Df)(x_0)$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.



LA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $P=(x_0 ; f(x_0))$ CON PENDENZA $f'(x_0)$ SI CHIAMA LA RETTA TANGENTE E HA LA PROPRIETÀ CHE, VICINO A x_0, È LA RETTA CHE MEGLIO APPROSSIMA LA FUNZIONE.

QUESTA FRASE VAGA HA IL SEGUENTE SIGNIFICATO

1) $$\lim_{x\to x_0} f(x) - r(x) = f(x_0) - r(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = \underline{\underline{0}}$$

$y = r(x)$ è l'equazione della retta tangente.

2) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - r(x)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0) - r(x)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{r(x) - \overset{r(x_0)}{\overset{\|}{f(x_0)}}}{x - x_0} \right]$$

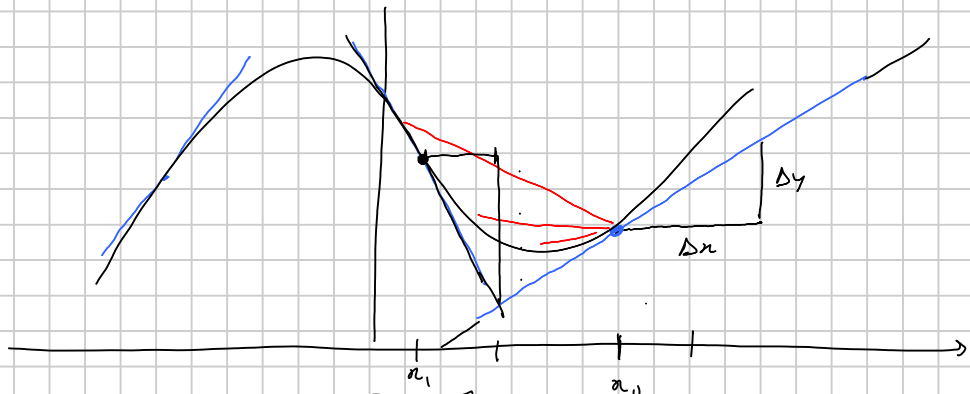
$$= \underline{f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - r(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - r(x)}{x - x_0} = 0}$$

QUINDI PER x VICINO x_0 ~~ ~~ $f(x) - r(x)$ È PIÙ PICCOLO DI $x - x_0$

CALCOLO APPROSSIMATIVO

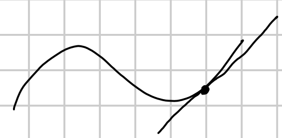


STIMA DI $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\dfrac{2,5}{4}} = \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8} = 0,625$

$$f'(x_1) = \frac{-4,5}{2} = -2,25$$

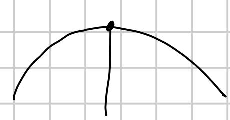
OSSERVAZIONI (SOTTO OPPORTUNE CHE SONO QUASI SEMPRE VERIFICATE NELLE FUNZIONI CHE STUDIERE NEL CORSO)

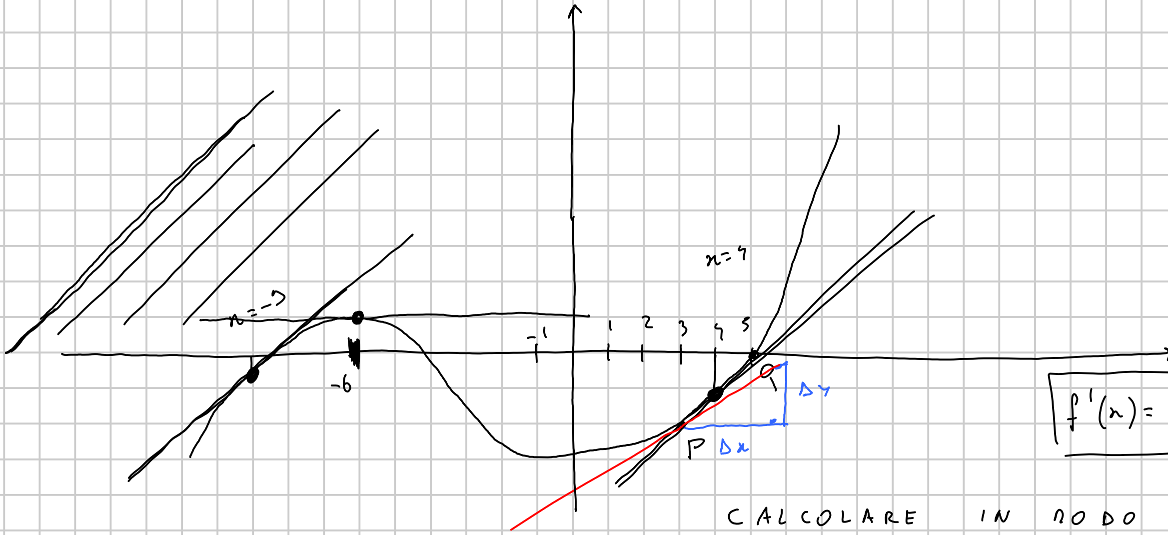
- SE $f'(x_0) > 0$ ALLORA LA FUNZIONE VICINO A x_0 È CRESCENTE



- SE $f'(x_0) < 0$ ALLORA LA FUNZIONE VICINO A x_0 È DECRESCENTE

- SE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO LOCALE ALLORA $f'(x_0) = 0$





$y = x + b$

$\boxed{f'(x) = 1 \text{ per } x = -7 \text{ e } 4}$

CALCOLARE IN MODO APPROSSIMATO $\boxed{f'(3)}$, $f'(5)$ E L'EQUAZIONE DELLE RETTE TANGENTI AL GRAFICO DELLA FUNZIONE f IN P e Q.

$$f'(3) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{1,8}{3} = \boxed{0,6}$$

LA RETTA TANGENTE

$$y = \underline{\underline{a}}\, x + b \qquad a = 0,6$$

$y = 0,6\, x + b$ È UNA RETTA CHE PASSA PER P

$$P = (3, -2)$$

$$-2 = 0,6 \cdot 3 + b \qquad \boxed{b = -3,8}$$

$$y = 0,6x - 3,8$$

CALCOLARE LE DERIVATE

REGOLE ALGEBRICHE

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(f\,g)'(x_0) = f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

CALCOLO DELLA DERIVATA DI x^n CON $n \in \mathbb{Z}$.

- $n=1$ $\quad f(x) = x \quad\quad f'(x_0) = 1$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

- $n = 2$ $\quad f(x) = x^2 = x \cdot x \qquad f(x) = \underline{g(x)}\, \overline{h(x)} \qquad g(x) = h(x) = x$

$f = gh$

$$f'(x_0) = g(x_0)\, h'(x_0) + g'(x_0)\, h(x_0)$$

$$= x_0 \cdot 1 + 1 \cdot x_0 = 2 x_0$$

- $n = 3$ $\quad f(x) = x^3 \qquad f(x) = g(x)\, h(x) \qquad \underline{\underline{g(x) = x}} \qquad \underline{\underline{h(x) = x^2}}$

$$f'(x_0) = x_0 \cdot (2 x_0) + 1 \cdot x_0^2 = 3 x_0^2$$

IN GENERALE SE $\boxed{f(x) = x^e \qquad f'(x) = e\, x^{e-1}}$

SE $\boxed{f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$e^x = e^{x - x_0} \cdot e^{x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(e^{x - x_0} - 1)\, e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{\boxed{x \to x_0}} \frac{e^{\boxed{x - x_0}} - 1}{x - x_0}\, e^{x_0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{e^y - 1}{y}}}_{\downarrow\, 1}\ \underbrace{e^{x_0}}_{\downarrow\, e^{x_0}} = e^{x_0}$$

SE $f(x) = \log_e(x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

SE $f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos x$

SE $f(x) = \cos(x)$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

ESEMPIO DI CALCOLO DI DERIVATE

$$f(x) = \boxed{x^2 e^x} + \boxed{\log_e x}$$

$$f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 + \underline{x^3 e^x} + x \log_e x$$

$$D(x^2) = 2x^{2-1}$$

$$D(x^3 e^x) = x^3 \underline{D(e^x)} + \underline{D(x^3)}\, e^x$$

$$= x^3 e^x + 3x^2 e^x$$

$$D(x \log_e x) = x\, D(\log_e x) + D(x) \log_e x$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \log_e x = 1 + \log_e x$$

- $D\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{D(f)\,g - f\,D(g)}{g^2}$

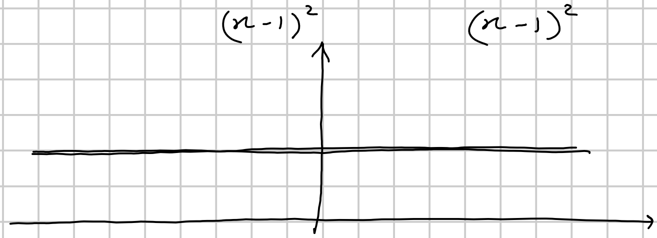
- $D\left(\dfrac{1}{\log_e x}\right)$

$$D\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{D(x+1)\,(x-1) - (x+1)\,D(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$D(x) = 1$

$D(1) = 0$ $\qquad y = 1$



$$D\left(\frac{1}{\log_e x}\right) = \frac{\overset{0}{D(1)}\,\log_e x - 1\cdot D(\log_e x)}{(\log_e x)^2} = -\frac{1/x}{(\log_e x)^2} = -\frac{1}{x(\log_e x)^2}$$

TORNIAMO AL PROBLEMA DI INIZIO LEZIONE

$$f(x) = \underline{x^3} - 3x^2$$

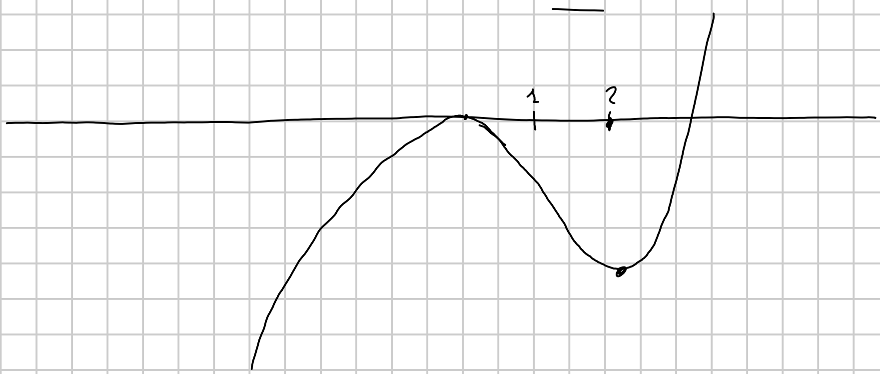
MI CALCOLO LA DERIVATA

$$f'(x) = 3x^2 - 3D(x^2) = 3x^2 - 6x = 3\underline{x}\,\underline{(x-2)}$$

$f'(x) = 0$ PER $x = 0$ E $x = 2$

$f'(x) > 0$ PER $x < 0$ O PER $x > 2$ LA FUNZIONE È CRES.

$f'(x) < 0$ PER $0 < \underline{x} < 2$ LA FUNZ. DECRES



$x =$ $x = 2$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE