LEZIONE 19 OTTOBRE

$a > 0 \quad a \neq 1 \qquad \log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\log_a y = x$ se e solo se $a^x = y$

Esempio

$\log_2 32 = 5 \qquad 32 = 2^5$

$\log_{10} 100 = 2 \qquad 100 = 10^2$

$\log_3 0,\overline{3} = -1 \qquad 0,\overline{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$

$\log_{137} 1 = 0 \qquad 1 = 137^0$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INVERSA E DEL LOGARITMO

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bigettiva e sia $g = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'inversa

$f(x) = y$ se e solo se $g(y) = x$

$y = a \quad x = b$

$$\text{Grafico } f = \{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

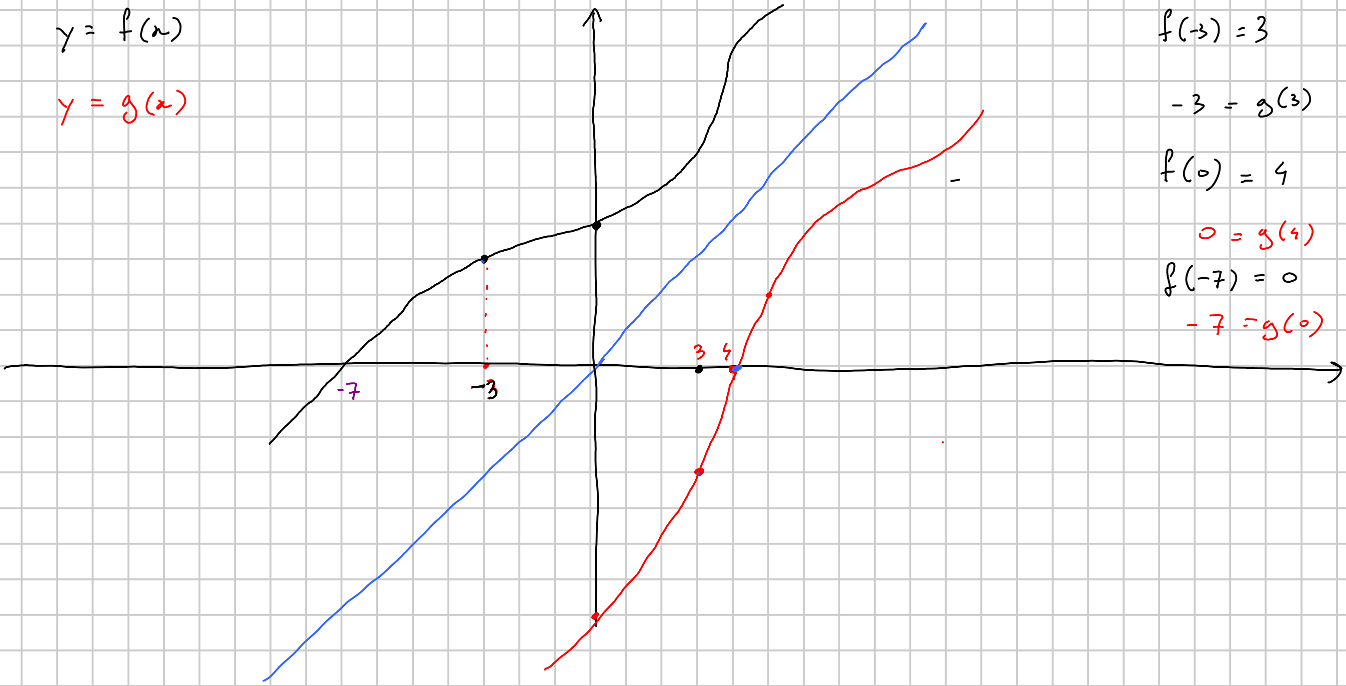
$$\text{Grafico } g = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \underline{b = g(a)} \} = \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \underline{a = f(b)} \}$$

$= \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : (b,a) \in \text{Grafico di } f \}$

$(a,b) \in$ Grafico di g se e solo se $(b,a) \in$ Grafico di f.

$y = f(x)$

$y = g(x)$



$f(-3) = 3$

$-3 = g(3)$

$f(0) = 4$

$0 = g(4)$

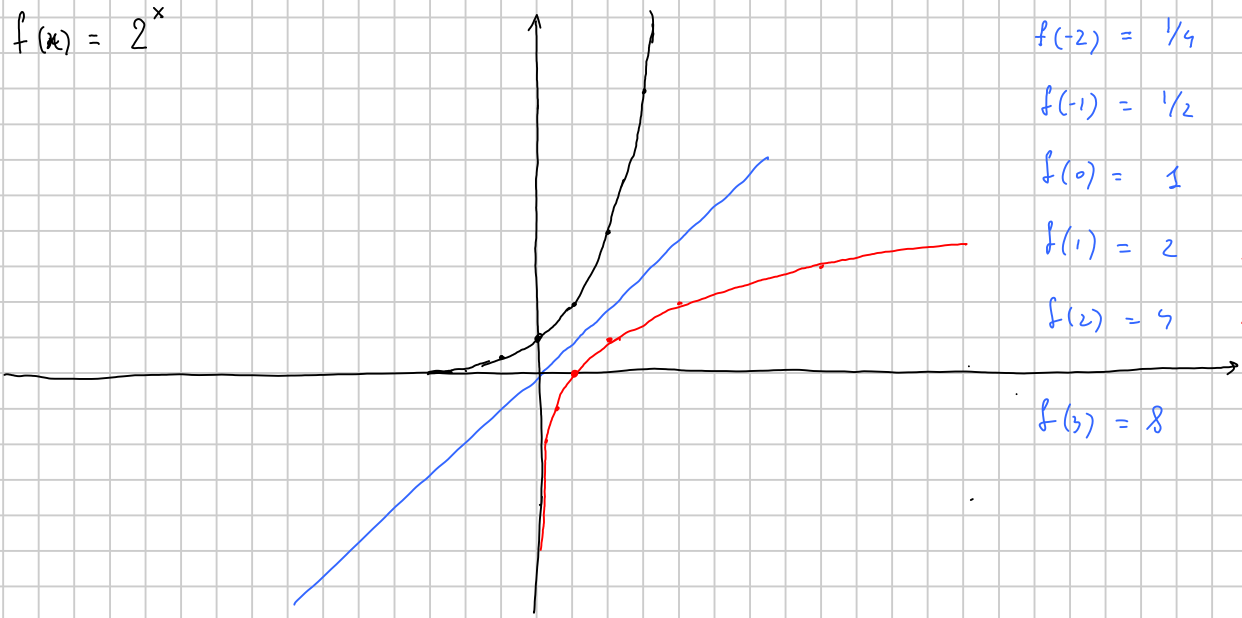
$f(-7) = 0$

$-7 = g(0)$

IL GRAFICO DI g È SIMMETRICO AL GRAFICO RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE

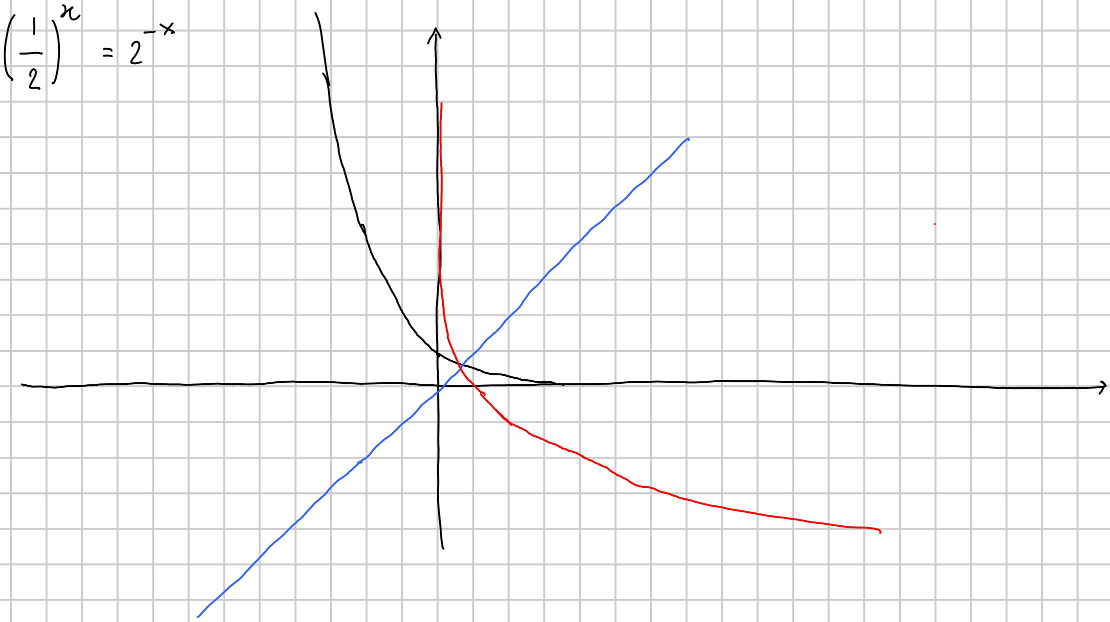
IL CASO DEL LOGARITMO

$f(x) = 2^x$



$f(-2) = 1/4$	$\log_2(1/4) = -2$
$f(-1) = 1/2$	$\log_2(1/2) = -1$
$f(0) = 1$	$\log_2(1) = 0$
$f(1) = 2$	$\log_2(2) = 1$
$f(2) = 4$	$\log_2(4) = 2$
$f(3) = 8$	

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



- SE $a > 1$ $\quad a^x$ È CRESCENTE E QUINDI $\log_a x$ È CRESCENTE

Se $\underline{x_1 < x_2}$ allora $\underline{y_1 = a^{x_1} < y_2 = a^{x_2}}$ $\qquad x_1 < x_2 \qquad y_1 < y_2$

$x_i = \log_a y_i \qquad y_i = a^{x_i}$

$x_1 = \log_a y_1 < x_2 = \log_a y_2$ quando $y_1 < y_2$

VOGLIAMO FAR VEDERE CHE SE $\boxed{y_1 < y_2}$ ALLORA

$x_1 = \log_a y_1 < x_2 = \log_a y_2$

INFATTI $\boxed{x_1 < x_2}$ e va bene

DEVO SCARTARE QUESTE DUE
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 > x_2 \end{array} \right.$$

OVVERO $x_1 \geq x_2$

INFATTI SE FOSSE $x_1 \geq x_2$

AVREMMO
$$\boxed{\begin{array}{ccc} a^{x_1} & \geq & a^{x_2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ y_1 & & y_2 \end{array}} \qquad (a > 1)$$

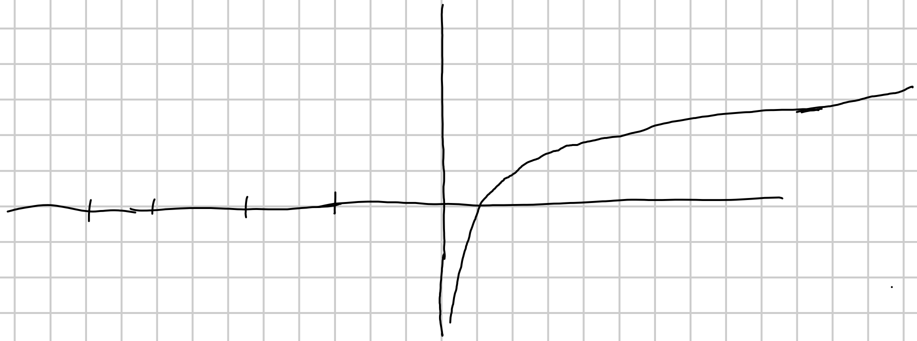
QUESTO NON PUÒ ESSERE.

- $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$



- PROPRIETÀ ALGEBRICA

$$\log_e(e^x) = x$$

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

$$y_1 \quad y_2 = y$$

$$\log_e(y_1 y_2) = \log_e y = x_1 + x_2$$

$$= \log_e y_1 + \log_e y_2$$

ESERCIZIO

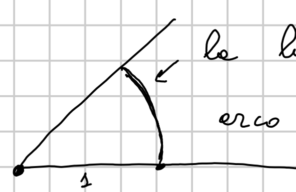
- $\log_5 125 = 3$ $\qquad 125 = 5^3$
- $\log_3 27 = 3$ $\qquad 27 = 3^3$
- $\log_{10} 0{,}01 = -2$ $\qquad \frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}$

- Disegnate in modo accurato il grafico di $\log_3 x$

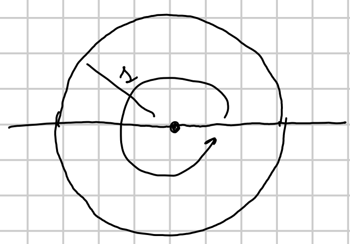
→ Se f è bigettiva e decrescente allora f^{-1} è decrescente.

(sin cos tg)

I RADIANTI SONO UNA MISURA DI ANGOLI



la lunghezza di questo arco di cerchio è la misura in radianti dell'angolo.



angolo piatto $180^\circ = \pi$ rad

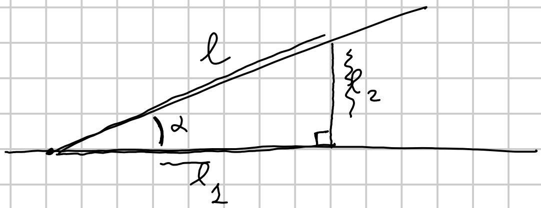
angolo giro $360^\circ = 2\pi$ rad.

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$$

$$\frac{360}{2\pi}{}^\circ = 1 \text{ rad}$$

$$75^\circ = 75 \frac{2\pi}{360} \text{ rad.}$$

DATO UN ANGOLO α



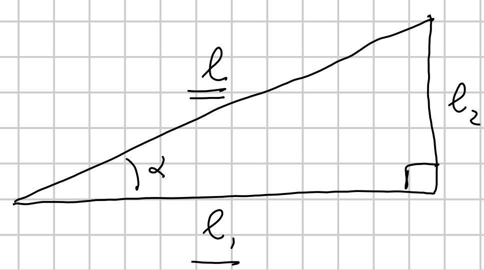
$\cos\alpha$

$\sin\alpha$

$tg\,\alpha$

per definizione $\cos\alpha = \frac{\ell_1}{\ell}$ $\sin\alpha = \frac{\ell_2}{\ell}$ $tg\,\alpha = \frac{\ell_2}{\ell_1}$

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 =$$



$$= \left(\frac{\ell_1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{\ell}\right)^2 =$$

$$= \frac{\ell_1^2}{\ell^2} + \frac{\ell_2^2}{\ell^2} = \frac{\ell_1^2 + \ell_2^2}{\ell^2} = \frac{\ell^2}{\ell^2} = 1.$$

TEO. DI PIT.

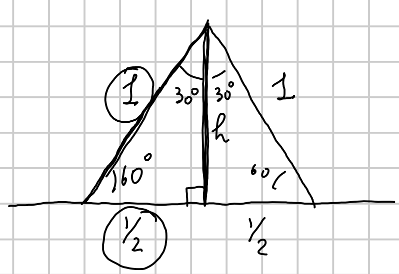
- $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

- $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\ell_2 / \cancel{\ell}}{\ell_1 / \cancel{\ell}} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = tg(\alpha)$

$\sin 60^\circ$

$\cos 60^\circ$

$tg\, 60^\circ$



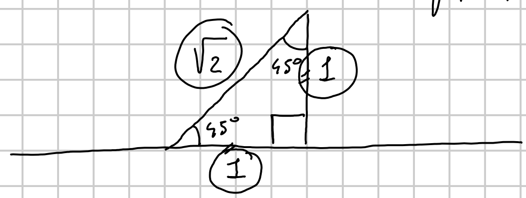
$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \sqrt{3}/2$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$tg\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$



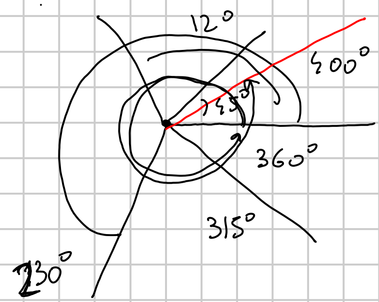
$$\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

$$\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

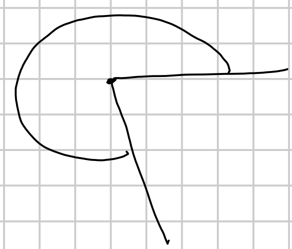
$$tg\,(45^\circ) = 1/1 = 1$$

CONSIDERO ANGOLI ANCHE DI VALORE NEGATIO O PIÙ AMPI DI 360° OVVERO 2π RAD.

ANGOLO DI 360° LO CONSIDERO COME UN ANGOLO DI 0°



ANGOLO DI 2π RAD LO CONSIDERO COME UN ANGOLO DI 0 RAD

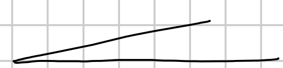


ANGOLO $\underline{1000^\circ} = 640^\circ + 360^\circ = 640^\circ$

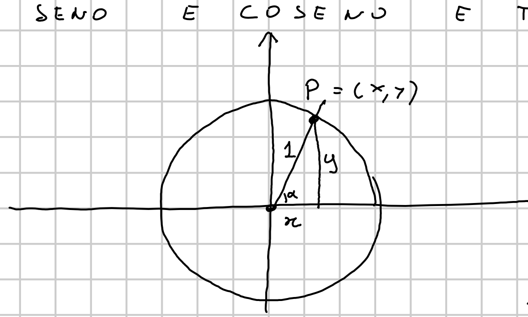
$= 640 = 360^\circ + 280^\circ = \underline{280^\circ}.$

VOGLIO DEFINIRE SIN E COSENO DI UN ANGOLO QUALSIASI

coseno(370°) = coseno(10°)



DEFINIZIONE DI SENO E COSENO E TANGENTE PER α QUALSIASI



CENTRO ORIGINE E RAGGIO 1

$\cos \alpha = x$

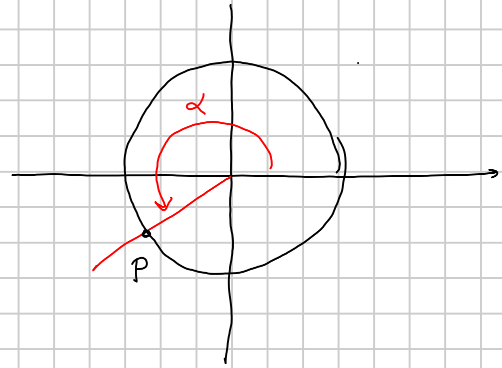
$\text{sen}\, \alpha = y$

SE α è QUALSIASI

TRACCIAMO LA SEMIRETTA ROSSA

SIA P L'INTERSEZIONE

TRA SEMIRETTA E CERCHIO



$P = (x_P \; y_P)$

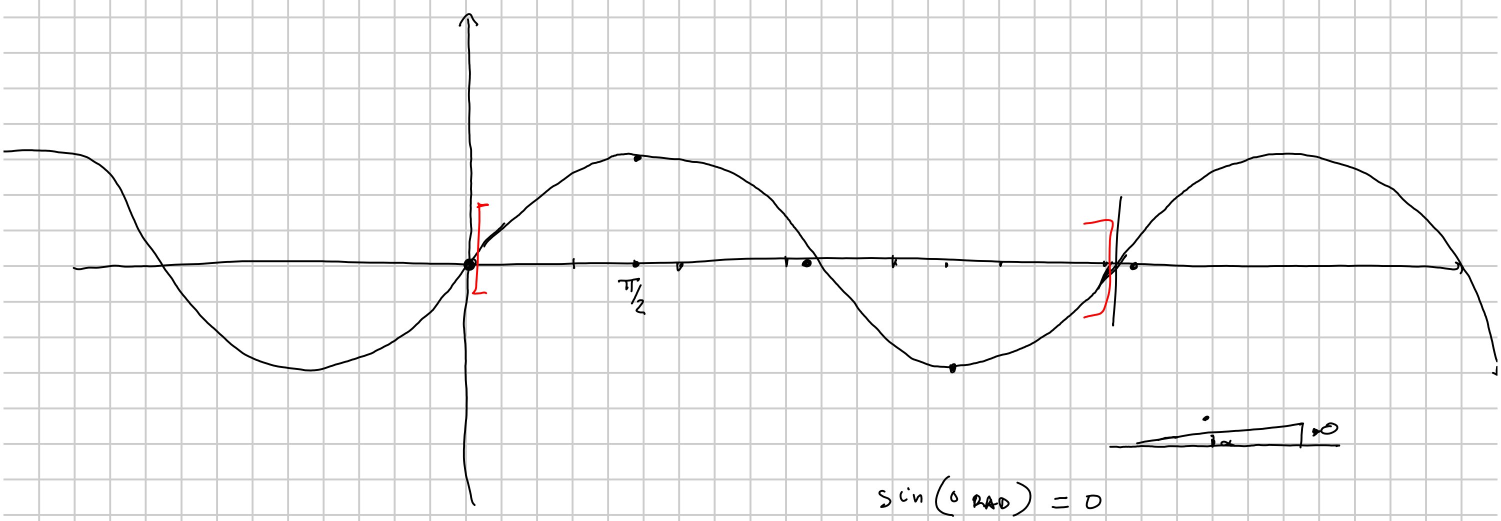
E DEFINISCO $\cos \alpha = x_P$

$\sin \alpha = y_P$

$tg\, \alpha = \dfrac{y_P}{x_P} = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

SE MISURIAMO L'ANGOLO IN RADIANTI LE FUNZIONI CHE SI OTTENGONO SONO LA FUNZIONE SENO, LA FUNZIONE COSENO E LA FUNZIONE TANGENTE.

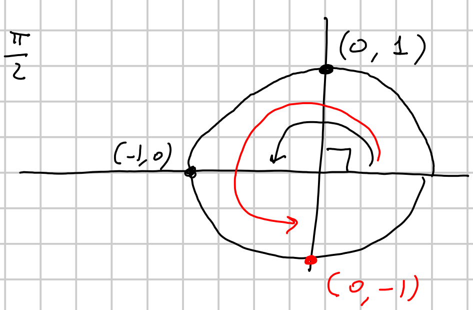
GRAFICO DELLA FUNZIONE SENO

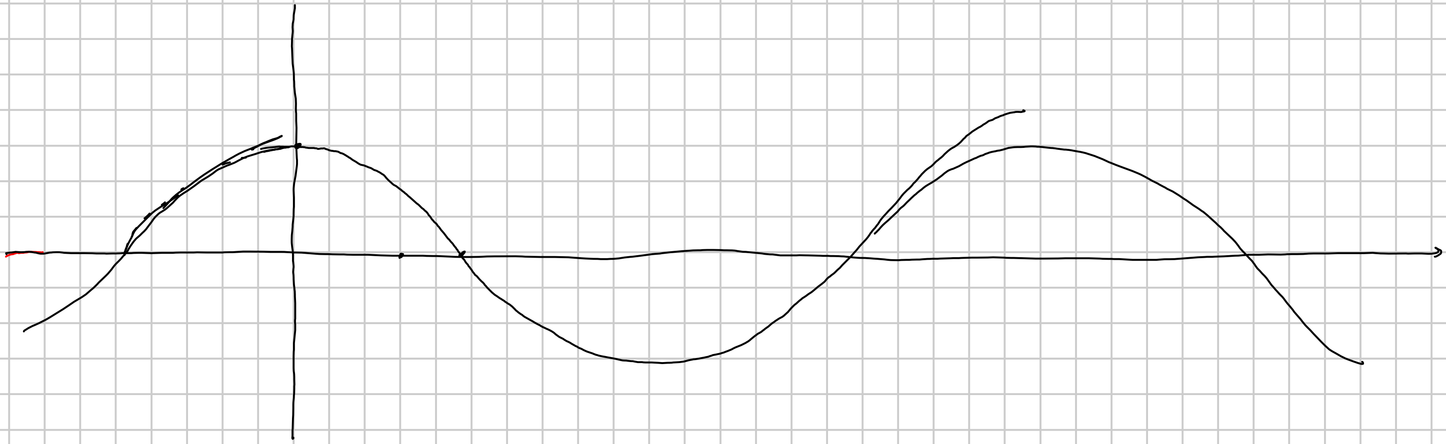


$\sin(0 \text{ RAD}) = 0$

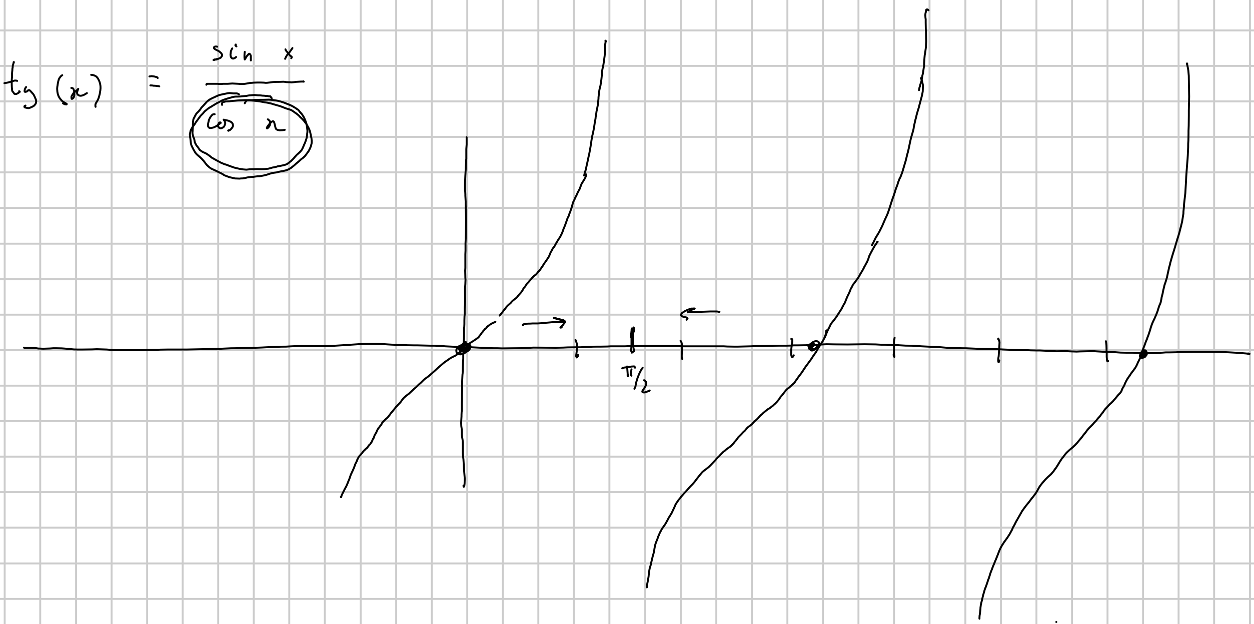
$\sin \dfrac{\pi}{2}$

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$





$$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3e^{3x} + e^{x} + 1}{e^{2x} + 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \boxed{\frac{3\,(e^{x})^{3} + e^{x} + 1}{(e^{x})^{2} + 2}}$$

$$x \longrightarrow e^{x} = y \longrightarrow \boxed{\frac{3y^{3} + y + 1}{y^{2} + 1}}$$

SE LA DEVO CALCOLARE IN 5 $\qquad e^{5} = \underline{148} = y$

$$\frac{3\,(148)^{3} + 148 + 1}{(148)^{2} + 2}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{3 (e^x)^3 + e^x + 1}{(e^x)^2 + 2}}$$

$$\frac{1}{e^5} \quad \frac{1}{e^{100}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underset{\underset{y}{\parallel}}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{3y^3 + y + 1}{y^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \overset{\overset{y}{\parallel}}{e^x} = 0$$

$$\lim_{y \to 0}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3(e^x)^3 + e^x + 1}{(e^x)^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{3 (e^x)(e^x)(e^x)}_{\to 0} + \underbrace{e^x}_{\to 0} + \underbrace{1}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{(e^x)^2}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{2}_{\downarrow\, 2} = 2$$