2° COMPITINO DI ARITMETICA

20 dicembre 2017

1. (a) Siano G un gruppo abeliano, H un gruppo qualunque e $f\colon G \to H$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(G)$ è un sottogruppo abeliano di H.

(b) Sia $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Determinare il numero degli omomorfismi surgettivi da G a $\mathcal{S}_3$. Contare tutti gli omomorfismi da G a $\mathcal{S}_3$.

2. Sia $m \in \mathbb{Z}$ un numero intero diverso da zero e sia $f_a(x) = X^4 - aX - m \in \mathbb{Z}[X]$. Dimostrare che il numero degli elementi $a \in \mathbb{Z}$ per cui $f_a(X)$ è riducibile è finito.

3. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

(a) Dimostrare che $[K : \mathbb{Q}] = 6$.

(b) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.

(c) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e su $\mathbb{Q}$.