COMPITO DI ALGEBRA 1

13 settembre 2019

1. Sia G un gruppo di ordine $2 \cdot 3 \cdot 7$ e sia $g \in G$ un elemento di ordine 14. Supponiamo che G non contenga elementi di ordine 6.

(a) Dimostrare che $\langle g \rangle$ non è normale in G.

(b) Dimostrare che $\langle g^2 \rangle$ è contenuto nel centro di G.

2. Siano G un gruppo finito, p un numero primo che divide l'ordine del gruppo, e n_p il numero dei p-sottogruppi di Sylow di G. Dimostrare che l'insieme dei normalizzatori dei p-sottogruppi di Sylow costituisce una classe di coniugio dei sottogruppi di G che ha esattamente n_p elementi.

3. Sia A un anello commutativo con identità.

(a) Supponiamo che per ogni ideale I di A valga $\sqrt{I} = I$. Dimostrare che, se k è un intero positivo e J, L sono ideali di A per cui $J^k = L^k$, allora $J = L$.

(b) Supponiamo invece che esista un ideale I di A con $I = I^2$ e tale che $\sqrt{I} \neq I$. Dimostrare che esistono due ideali distinti di A, J e L, per cui $J^k = L^k$ per ogni $k > 1$.

(c) Dimostrare che, se $\sqrt{I} \neq I$ e la catena discendente di ideali $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$ è stazionaria, allora esiste un ideale I_0 di A tale che $I_0 = I_0^2$ e $\sqrt{I_0} \neq I_0$.

4. Sia $\alpha = \sqrt[5]{5 + \sqrt{24}} \in \mathbb{R}$.

(a) Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha, \zeta_5)$ è un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$.

(b) Per ogni intero j sia $\beta_j = \alpha\zeta_5^j + \frac{1}{\alpha\zeta_5^j}$. Determinare, in funzione di j, il polinomio minimo di β_j su $\mathbb{Q}$.

(c) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha + 1/\alpha)$ è un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$.