COMPITO DI ALGEBRA 1

2 luglio 2019

1. Sia G un gruppo di ordine $2^k d$, con d dispari e k positivo. Supponiamo che G contenga un unico sottogruppo di ordine 2^k e che questo sottogruppo, che denotiamo P, sia ciclico.

(a) Dimostrare che P è contenuto nel centro di G.

(b) Dimostrare che G contiene un sottogruppo di indice 2.

(c) Dimostrare che G è isomorfo al prodotto diretto $P \times H$ per un opportuno gruppo H di ordine d.

Nota. È possibile usare senza dimostrazione il fatto – visto in classe – che un gruppo di ordine $2d$ con d dispari possiede un sottogruppo di ordine d.

2. Sia G un gruppo di ordine $8p^2$, dove p è un numero primo. Dimostrare che G non è semplice.

3. Sia A un dominio ad ideali principali.

(a) Dimostrare che ogni ideale primo P di $A[X]$ tale che $P \cap A = \{0\}$ è principale.

(b) Sia I un ideale di $A[X]$ tale che $I \cap A = (m)$ dove $m \neq 0$ è "libero da quadrati", ossia prodotto di primi distinti. Dimostrare che I può essere generato da al più 2 elementi.

4. Sia $g(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ il polinomio $g(x) = x^4 + x + 1$ e sia β una radice di $g(x)$ in una opportuna estensione di $\mathbb{F}_2$. Determinare, per ogni $n \geq 1$, il grado di $\mathbb{F}_2(\beta^n)$ su $\mathbb{F}_2$.