2° COMPITINO DI ALGEBRA 1

21 dicembre 2018

1. Sia A un *anello booleano*, ovvero un anello (commutativo unitario) con la proprietà che per ogni $x \in A$ si abbia $x^2 = x$. Dimostrare che

(a) $x + x = 0$ per ogni $x \in A$.

(b) Ogni ideale finitamente generato di A è principale.

2. Consideriamo l'anello $A = \mathbb{Q}[x, y]$ e il suo ideale $I = (x - y, x^3 + y^3 - x)$. Descrivere due campi K_1, K_2 ed un isomorfismo $A/I \cong K_1 \times K_2$.

3. Siano α, β due elementi algebrici su $\mathbb{Q}$ di grado 3; siano poi, rispettivamente, $f(X)$ e $g(X)$ i polinomi minimi di α e β su $\mathbb{Q}$ e F, K i loro campi di spezzamento. Supponiamo che $[F : \mathbb{Q}] = 6$.

(a) Dimostrare che, se $\beta \notin F$, allora $[F(\beta) : F] = 3$.

(b) Determinare i possibili gradi di FK su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare quante possono essere le sottoestensioni di FK di grado 2 su $\mathbb{Q}$.