MISCELLANEA

Note Title 11/6/2018

Determinare $Aut(S_3)$ e $Aut(S_4)$

$\boxed{\text{IDEA}}$ Studiare le immagini dei generatori

$$\left.\begin{matrix}(1,2)\\(1,3)\\(2,3)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\ \psi\ } \left\{\begin{matrix}(1,2)\\(1,3)\\(2,3)\end{matrix}\right.$$

- ψ deve mandare trasposizioni in trasposizioni
- ψ induce quindi una permutazione di questi tre elementi.

$$\# Aut(S_3) \leq \# S_3 = 6$$

- Coniugio:

$$S_3 \overset{\Phi}{\hookrightarrow} Aut(S_3)$$
$$g \longmapsto \text{coniugio per } g$$

$$\ker \Phi = Z(S_3) = \{e\}$$

Per motivi di cardinalità è un isomorfismo.

$\mathrm{Aut}(S_4)$:

$(1,2)$
$(1,3)$
$(1,4)$
$(2,3)$
$(2,4)$
$(3,4)$

$(1,2)(3,4)$
$(1,3)(2,4)$
$(1,4)(2,3)$

Supponiamo che $\varphi((1,2))$ = coppia di trasp.

Allora $\underbrace{\varphi(g(1,2)g^{-1})}_{\text{al variare di } g \to \text{ tutte le trasposizioni}} = \underbrace{\varphi(g)\,\varphi((1,2))\,\varphi(g)^{-1}}_{\text{coppia di trasp.}}$

Siccome ci sono 6 trasp. e 3 coppie di trasp

e φ è iniettiva $\longrightarrow$ non si può.

$\boxed{\text{IDEA}}$ Sappiamo che $\varphi((1,2))$ = trasposizione $= (i,j)$

Coniugio per $(1,i)(2,j)$ porta (i,j) in $(1,2)$

È sufficiente studiare gli automorfismi che mandano $(1,2)$ in $(1,2)$

$$(1,4) = (3,4)(1,3)(3,4)^{-1}$$

- $(1,2) \longrightarrow (1,2)$
- $(3,4) \longrightarrow (3,4)$
- $(1,3) \longrightarrow \boxed{(1,3)} \quad \boxed{(1,4)} \quad (2,3) \quad (2,4)$

$(1,4)$

$(2,3)$

$(2,4)$

$\psi = id$

$$\begin{array}{ccccc}
S_4 & \xrightarrow{\psi} & S_4 & \xrightarrow{\text{coniugio } g} & S_4 \\
(1,2) & \longrightarrow & (1,2) & \longrightarrow & (1,2) \\
(3,4) & \longrightarrow & (3,4) & \longrightarrow & (3,4) \\
(1,3) & \longrightarrow & (1,4) & \xrightarrow[g=(3,4)]{} & (1,3) \\
(1,3) & \longrightarrow & (2,3) & \xrightarrow[g=(1,2)]{} & (1,3) \\
(1,3) & \longrightarrow & (2,4) & \xrightarrow[g=(1,2)(3,4)]{} & (1,3)
\end{array}$$

Quindi ψ = composizione di coniugi = coniugio.

$$S_4 \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Aut(S_4)$$

$$\Rightarrow \quad Aut(S_4) \simeq S_4$$

Teorema $\quad Aut(S_n) \simeq S_n \quad$ per $n \neq 2, 6$

Idea: se $n \neq 6$, $k \neq 1$
$$\#\{\text{trasposizioni}\} \neq \#\{\text{prodotti di } k \text{ trasposizioni}\}$$

$$\# \{\text{trasp in } S_6\} = \# \{\text{prodotti di 3 trasp in } S_6\}$$

Un esercizio di classificazione: $|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$n_3 = 1$ o 7

$n_5 = 1$ o 21

$n_7 = 1$ o 15

⌈Testo vero: dimostrare che esistono 2 (classi di isomorfismo di) gruppi di ord $= 105$⌋

$$\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\cong$$

$$\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

Se $n_5 = 21$ e $n_7 = 15$

G contiene $21 \cdot (5-1)$ elementi ord $= 5$

$15 \cdot (7-1)$ ——— $= 7$

$$84 + 90 > 105$$

Quindi o $n_5 = 1$ o $n_7 = 1$ (o entrambi)

Se P_5 e' un 5-Sylow e P_7 e' un 7-Sylow

$\Longrightarrow P_5 P_7 < G$ (perché almeno uno fra

P_5 e P_7 e' normale)

$|P_5 P_7| = 35 \quad 5 \nmid 7-1, \quad 7 \nmid 5-1 \implies$

$$H := P_5 P_7 \simeq \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$$

$H \trianglelefteq G$ perché $[G : H] = 3 =$ più piccolo fattore primo di $|G|$

$$\implies \quad G \simeq (\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

(da qui si finisce)

Modo 2: in H (e quindi in G) ci sono 24 elementi di ordine 35, che non stanno in alcun Sylow.

Se $n_5 = 21$ $\Big<$ 84 elementi ord $= 5$; 24 " " 35

G contiene ≥ 108 elem, assurdo

$n_7 = 15$ ho almeno $90 + 24 > 105$ elementi.

$K = P_7 P_3 \qquad\qquad P_5$

Ora sappiamo che P_5, P_7 sono normali

$$G \xrightarrow{\chi} \mathrm{Aut}(P_5) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$
$$g \longmapsto \text{coniugio per } g \big|_{P_5}$$

χ è banale per cardinalità $\Rightarrow P_5 \subseteq Z(G)$

$$g\, p_5\, g^{-1} = p_5 \qquad \forall p_5 \in P_5 \ \forall g \in G$$

$$G \simeq P_3 P_7 \times P_5 \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ \left(\text{unico gp non ab. ord } 21\right) \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{cases}$$

Sottogruppi interessanti di S_n

(i) Per $n \geq 5$ l'unico sg normale non banale è A_n.

(ii) Per $n = 4$ l' ——— di indice 2 è A_4

(i) $H \trianglelefteq S_n$. Allora $H \cap A_n \trianglelefteq A_n$

$$\xRightarrow{A_n \text{ semplice}} H \cap A_n = \begin{cases} \{e\} & (a) \\ A_n & (b) \end{cases}$$

(b) $A_n \subseteq H \subseteq S_n \Rightarrow H = A_n$ o S_n

(a) $h_1, h_2 \in H \setminus \{e\} \Rightarrow h_1, h_2$ permutaz dispari

$\Rightarrow h_1 h_2 \in A_n$, perché è pari

$\Rightarrow h_1 h_2 = e$

In particolare: $h^2 = id \quad \forall h \in H$

e $|H| \leq 2$

Se $|H| = 2$, sia $h \in H$. Allora H contiene tutti gli elementi di S_n con la stessa dec. in cicli di h, assurdo.

(ii) $H \subsetneq S_4$ è di indice $2 \longrightarrow$ è normale e contiene un 3-ciclo $\Rightarrow H$ contiene tutti i 3-cicli $\Rightarrow H \supseteq A_4$.

Oss $S_4 \trianglerighteq K = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$

$$\Longrightarrow S_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_3$$

Esercizio $H < S_n$ di indice n. Allora $H \simeq S_{n-1}$

Soluzione Assumo $n \geq 5$.

$$S_n \circlearrowleft S_n/H \quad \text{per moltipl. a sx}$$

$$\rightsquigarrow \quad \Phi : S_n \xrightarrow{\sim} S_{|S_n/H|} = S_n$$

$$\ker \Phi \begin{cases} \subseteq H & gH = H \Rightarrow g \in H \\ \{e\},\ A_n,\ S_n \end{cases}$$

Per cardinalità, $\ker \Phi = \{e\}$

Considero $\Phi|_H : H \hookrightarrow S_n$

$$h \longmapsto \left(\text{permutaz. indotta da } h. \right)$$

$$H \qquad g_1 H \qquad g_2 H \qquad \cdots \qquad g_{n-1} H$$

$$\begin{array}{c} H \\ \downarrow \\ hH = H \end{array}$$

$$\operatorname{im} \Phi|_H \subseteq \operatorname{Stab}(1) \simeq S_{n-1}$$

Per cardinalità è un isomorfismo.

Un gruppo di matrici

$$G = GL_2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ ad-bc \not\equiv 0\,(3) \end{matrix} \right\}$$

$\det : G \longrightarrow \mathbb{F}_3^\times$ omomorfismo (Binet)

$\ker \det =: SL_2(\mathbb{F}_3)$ "gruppo speciale lineare"

$=$ matrici di $\det = 1$

$$\# SL_2(\mathbb{F}_3) = 1/2 \; \# GL_2(\mathbb{F}_3) = \frac{1}{2}(3^2-1)(3^2-3) = 24$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$H := SL_2(\mathbb{F}_3)$

(i) $Z(G) \subseteq H$ $\qquad Z(G) = \{\pm id\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow a = d$$

(ii) $H/Z(G) \simeq A_4$

$$n_3(H) = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$ NO

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha ordine 3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______

Azione di H sui 3-Sylow

$H \xrightarrow{\Phi} S_4$ azione di coniugio

$\ker \Phi = ?$ $\ker \Phi \supseteq Z(G)$

$$N_H(P_3) \begin{cases} [H : N_H(P_3)] = 4 \\ |N_H(P_3)| = 6 \longrightarrow N_H(P_3) = P_3 \cdot Z(G) \\ \ker \Phi \subseteq N_H(P_3) \end{cases}$$

$$\ker \Phi \subseteq \bigcap_{P_3} N_H(P_3) = \bigcap_{P_3} (P_3 \cdot Z(G)) = Z(G)$$

Abbiamo quindi $H/Z(G) \hookrightarrow S_4$.

Per quanto visto prima, $|H/Z(G)| = 12 \Rightarrow H/Z(G) \simeq A_4$

(iii) Dimostrare che $n_2(H) = 1$

In A_4 il 2-Sylow è $K = \begin{Bmatrix} id, & (1,2)(3,4) \\ (1,3)(2,4), & (1,4)(2,3) \end{Bmatrix}$

$$K \trianglelefteq A_4. \text{ Sia } \pi : \begin{matrix} H & \longrightarrow & H/Z(G) \simeq A_4 \\ \triangledown & & \triangledown \\ \pi^{-1}(K) & & K \end{matrix}$$

Siccome $\# \pi^{-1}(K) = 8$, $\pi^{-1}(K)$ è l'unico 2-Sylow

Sia J = unico 2-Sylow di H

(iv) J è non abeliano $\qquad J \simeq Q_8$

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad ij \neq ji$$

Oss Se $h \in J$, $h^2 \in Z(G)$. Infatti in $H/Z(G)$ tutto ha ordine che divide 2

(v) Mostrare che J = derivato di H

$$ghg^{-1}h^{-1}$$

Proprietà fondamentale H/H' è abeliano ed è il più grande quoziente abeliano di H

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & A \\ & H/H' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A = gp abeliano

Oss $J \triangleleft H \implies H \longrightarrow H/J \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\implies J \supseteq H'$ (perché il quoziente è abeliano)

Oss 2 $H' \neq \{e\}$ perché H non è abeliano

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[dr] & & H/J \\ & H/H' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

H' contiene un elemento di ord $= 2$

$\implies H' \supseteq Z(G)$ (unico el. di ordine 2 è $-Id$)

$$H \longrightarrow \underbrace{H/Z(G)}_{A_4} \longrightarrow H/H'$$

Basta quindi mostrare che $A_4' = K$

Verifica: $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$

$$= (1,2)(3,4) \in A_4'$$

$A_4' \trianglelefteq A_4 \implies A_4' \ni$ tutti i prod di 2 trasp

$$\implies A_4' \supseteq K.$$

Osservo che $A_4/K \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \implies A_4' \subseteq K$

$$\implies A_4' = K \implies H' = \pi^{-1}(K) = J \qquad \square$$