MISCELLANEA

Note Title 10/24/2018

Generatori di S_n

$(1,2)$ $\quad (1,2,\dots,n)$ generano S_n

$(1,4)$ $\quad (1,2,\dots,6)$ NON " S_6

$$H = \langle \underset{\tau}{(1,4)} ; \underset{\sigma}{(1,2,\dots,6)} \rangle$$

$\tau^2 = id \qquad \sigma^6 = id$

$\sigma \tau \sigma^{-1} = (2,5)$

$\sigma^2 \tau \sigma^{-2} = (3,6)$

$$H > \langle (1,4); (2,5); (3,6) \rangle \simeq \left(\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}\right)^3$$

$$8 \mid \# H \mid 6!$$

$\left(\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}\right)^3$ $\qquad 6 \mid \# H \qquad (H \ni 6\text{-ciclo})$

$\Rightarrow \quad 24 \mid \# H$

$\sigma^2 = (1,3,5)(2,4,6)$

$\sigma^3 = (1,4)(2,5)(3,6) \in \left(\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}\right)^3$

Oss. $\sigma^3 \in Z(H) \Rightarrow H \subseteq Z_{S_6}(\sigma^3)$

Chi è $Z_{S_6}(\sigma^3)$?

$$\# Z_{S_6}(\sigma^3) = \frac{\# S_6}{\# \text{orbita}(\sigma^3)} =$$

$$= \frac{6!}{\binom{6}{2,2,2} \cdot \frac{1}{3!}} = 2^3 \cdot 3! = 48$$

$$Z_{S_6}(\sigma^3) = \langle (1,4);\ (2,5);\ (3,6);\ (1\ 2)(4\ 5);\ (1,2,3)(4,5,6) \rangle$$

$$Z_{S_6}(\sigma^3) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$$

$$Z_{S_6}(\sigma^3) \xrightarrow{\ \Phi\ } S_3$$

$\Phi(\rho)$: prendo $\overset{A}{(1,4)}\ \overset{B}{(2,5)}\ \overset{C}{(3,6)}$

Coniugo per ρ : $\rho\, A\, B\, C\, \rho^{-1}$

mi verrà $B\ A\ C$ [se $\rho = (1,2)(4,5)$]

$\Phi(\rho)$ è $(B\ A)(C)$

$\Phi((1,4)) = id \qquad \Phi((1,2,3)(4,5,6))$

$$\Phi((1,2,3)(4,5,6)) = (A,B,C)$$

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \subseteq H \subseteq Z_{S_6}(\sigma^3) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes S_3$$

Per determinare H e' sufficiente determinare $\Phi(H)$.

Oss. $\ker \Phi = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$

$$H = \langle (1,4) \ ; \ (1,2,3,4,5,6) \rangle$$

$$\Phi(H) = \langle \Phi((1,4)), \ \Phi((1,2,\dots,6)) \rangle$$

$$= \langle id, \ (A,B,C) \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \# H = \# \ker \Phi \cdot \# \Phi(H) = 8 \cdot 3$$

$$H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes_{\psi} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

$$\psi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3\right)$$

$$1 \longmapsto \left(f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3, \ (x,y,z) \longmapsto (y,z,x) \right)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\sigma^2 \longmapsto (A \ C \ B)$$

Ordini di elementi in $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$

$$\varphi : \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z})^*$$

$$1 \longmapsto \text{moltiplicazione per } 2$$

$$G = \mathbb{Z}/_7\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$$

Per ogni $d \in \mathbb{N}$ dire quanti elementi di ordine d contiene G.

$d \nmid 21$ nessuno

$d = 1, 3, 7, 21$

non ce ne sono altrimenti G sarebbe ciclico

almeno 6

Gli el. di ord $= 7$ sono esattamente 6

① Supponiamo siano almeno 7. Allora

$$g_1, g_1^2, \dots, g_1^6, g_2$$

$$\langle g_1 \rangle \cap \langle g_2 \rangle = \{e\}$$

$$G \supseteq \langle g_1, g_2 \rangle \supseteq \underbrace{\left\{ g_1^{\,i} g_2^{\,j} \;\middle|\; \begin{matrix} i = 0, \dots, 6 \\ j = 0, \dots, 6 \end{matrix} \right\}}_{\# \,=\, 49}$$

$|G| = 21$

② Uno $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ in G è 7-Sylow

$$\#\{7\text{-Sylow}\} \begin{cases} \text{è } \equiv 1 \mod 7 \quad (3^\circ \text{ Sylow}) \\ \text{divide } \dfrac{\#G}{7} = \dfrac{21}{7} = 3 \end{cases}$$

$$\#\{7\text{-Sylow}\} \in \{1, \cancel{3}, \cancel{7}, \cancel{21}\}$$

I restanti 14 elementi di G hanno ordine 3

$G \ni (a, b) \qquad a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \qquad b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Ordine 1: $(0, 0)$

Ordine 7: $(a, 0)$ con $a \not\equiv 0 \ (7)$

$g = (3, 1) \qquad (3, 1) \cdot (3, 1)$

$$g \cdot g = \big(3 + \underbrace{(\varphi(1))}_{\in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})}(3),\ 1 + 1\big)$$

$$= (3 + 2 \cdot 3,\ 2)$$

$$g^2 \cdot g = (3 + 2\cdot 3,\ 2)\cdot(3,1)$$

$$= \left(3+2\cdot 3 + (\varphi(2))(3),\ 2+1\right)$$

$$= \left(3+2\cdot 3 + 4\cdot 3,\ 0\right)$$

$$= \left(3(1+2+4),\ 0\right) = (0,0)$$

GRUPPI ABELIANI FINITAMENTE GENERATI

Teo Sia G un gruppo abeliano fin. generato.

Allora esistono $r \in \mathbb{N}$ e un gruppo ab. finito

T t.c. $G \simeq \mathbb{Z}^r \times T$

Oss. T e' il sottogp. di torsione di G,

$$T = \{ g \in G \mid \operatorname{ord}(g) \text{ finito} \}$$

Coroll. Ogni sottogruppo di $\mathbb{Z}^n$ e' isomorfo

a $\mathbb{Z}^k$ per qualche $k < n$

Ex Il sottogp di $\mathbb{Z}^3$ generato da

$(1,0,1)$; $(2,1,0)$; $(0,2,2)$

e' isomorfo a $\mathbb{Z}^3$

Esercizio Sia G abeliano generato da 2 elementi.

Dim. teo struttura per G.

Dim. Siano g, h i generatori. Allora

esiste $\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow G$ omom. surgettivo

$$\varphi(a,b) = g^a h^b$$

Omomorfismo: $\varphi\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big) =$

$$= \varphi\big((a_1+a_2,\, b_1+b_2)\big) = g^{a_1+a_2} h^{b_1+b_2}$$

G abeliano

$$= \left(g^{a_1}\cdot h^{b_1}\right)\cdot\left(g^{a_2} h^{b_2}\right) = \varphi\big((a_1,b_1)\big)\cdot\varphi\big((a_2,b_2)\big)$$

Surgettivo: g, h sono generatori

Sia $K = \ker\varphi$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Considero $\pi_1(K)$ e $\pi_2(K)$

- Se $\pi_1(K) = \pi_2(K) = (0) \Rightarrow K = \{(0,0)\}$

$$\xRightarrow[\text{omo}]{1^\circ \text{ teo}} \quad G = \mathbb{Z}^2/K = \mathbb{Z}^2$$

- $\pi_1(K) = \langle a \rangle, \quad a \neq 0$ — $\mathbb{Z}$ è ad ideali principali

$\big($ovvero: $K \ni (a,b)\big)$

Due sottocasi: o $K = \langle (a,b) \rangle$

o manca qualcosa

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \frac{a}{c}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b - \dfrac{ad}{c} \end{pmatrix}$$

$\langle (a,b) \rangle$

* Sottocaso 1: $K = \langle (a,b) \rangle$

* Sottocaso 2: K contiene un elemento della forma $(0, e)$ con $e \neq 0$

Sia $(c,d) \in K \setminus \langle (a,b) \rangle$

Siccome $\underset{c}{\underset{\parallel}{\pi_1((c,d))}} \in \pi_1(K) = \langle a \rangle$

$\Rightarrow a \mid c$, quindi K contiene anche

$$(c,d) - \frac{c}{a}(a,b) = \Big(0, \underbrace{d - \frac{bc}{a}}_{e}\Big)$$

Nel sottocaso 2, il quoziente è FINITO.

Infatti gli elementi (i,j) con $0 \leq i < a$, $0 \leq j < e$ rappresentano tutte le classi laterali.

Se (x,y) è un elemento di $\mathbb{Z}^2$, posso trovare

$K_1 \in \mathbb{Z}$ t.c. $(x,y) - K_1 \cdot (a,b) = (x_1, y_1)$

soddisfi $0 \le x_1 < a$ $\quad \left(k_1 \text{ "="} \lfloor x/a \rfloor \right)$

Poi posso trovare k_2 in modo che

$$(x_1, y_1) - k_2 \cdot (0, e) = (x_1, y_2)$$

Soddisfi $0 \le y_2 < e$ $\quad \left(k_2 \text{ "="} \lfloor y_1/e \rfloor \right)$

Quindi $(x, y) + K = \underbrace{(x_1, y_2)}_{\text{ce n'è solo un n° finito}} + K$

<u>Sottocaso 1</u>: $\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow G$ con $\ker \varphi = \langle (a, b) \rangle$

Esempio 1: $(a, b) = (1, 0)$

$$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\ker \varphi} = \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \times \{0\}} \simeq \mathbb{Z}$$

<u>Esempio 2</u>: $(a, b) = (2, 0)$

$$\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\ker \varphi} = \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \times \{0\}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\}$$
$$= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

<u>Esempio 3</u> $(a, b) = (1, 1)$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$$
$$(x, y) \longmapsto (x-y)$$

$$\ker \chi = \{ (n,n) \mid n \in \mathbb{Z} \} = \langle (1,1) \rangle$$

$$\operatorname{Im} \chi = \mathbb{Z}$$

1° teo omom: $\mathbb{Z}^2 / \langle (1,1) \rangle \simeq \operatorname{Im} \chi = \mathbb{Z}$

Esempio 3'

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x, y-x)$$

Iniettivo: verifica facile

Surgettivo: immagine contiene $\psi(0,1) = (0,1)$

$\psi(1,1) = (1,0)$

$$\psi\big((1,1)\big) = (1,0)$$

Perché e' utile? $\dfrac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,1) \rangle} \simeq \dfrac{\psi(\mathbb{Z}^2)}{\psi(\langle 1,1 \rangle)}$

$$= \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,0) \rangle} \simeq \mathbb{Z}$$

Esempio 4 = caso generale

$$\mathbb{Z}^2 / \langle (a,b) \rangle = \psi(\mathbb{Z}^2) / \langle \psi(a,b) \rangle$$

$$= \mathbb{Z}^2 / \langle (a, b-a) \rangle .$$

$$\mathbb{Z}^2 / \langle (6,9) \rangle \cong \mathbb{Z}^2 / \langle (6,3) \rangle$$

$$\simeq \mathbb{Z}^2 / \langle (3,6) \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 / \langle (3,3) \rangle$$

$$\simeq \mathbb{Z}^2 / \langle (3,0) \rangle \simeq \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$$

Algoritmo di Euclide $\overset{\mathbb{Z} \text{ è ad ideali principali}}{\Longrightarrow}$

$$\mathbb{Z}^2 / \langle (a,b) \rangle \simeq \mathbb{Z} / {(a,b)\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$$