ALGEBRA MULTILINEARE

MICHELE GRASSI

Note per il corso di Geometria Analitica e Algebra Lineare
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Anno accademico 2006-2007

Queste note verrano ulteriormente aggiornate a breve. Tornate sulla mia pagina web per scaricare la versione definitiva

Definizione 1. *Dati un insieme S ed un campo $\mathbb{K}$, il* $\mathbb{K}$-spazio vettoriale libero su *S è indicato con $\mathbb{K} < S >$ e si definisce come*

$$\mathbb{K} < S >= \{f : S \to \mathbb{K} \mid Supp(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\} \text{ ha cardinalità finita}\}$$

La struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K} < S >$ è indotta dall'inclusione nello spazio vettoriale di tutte le funzioni da S a $\mathbb{K}$. La funzione che vale 1 *sull'elemento $s \in S$ e zero su tutti gli altri elementi di S si indica con e_s. Dato un elemento $f \in \mathbb{K} < S >$, l'insieme finito $Supp(f) \subset S$ si chiama* supporto *di f.*

La funzione $s \to e_s$ si può pensare come ad una inclusione di insiemi

$$\Psi_S \ : \ S \ \to \ \mathbb{K} < S >$$

e in questo caso l'elemento $e_s = \Psi(s)$ spesso si indica piu' brevemente come s.

Esempio 1. *Se $S = \{1, ..., n\}$ è l'insieme formato dai primi n numeri naturali, allora abbiamo già incontrato lo spazio vettoriale $\mathbb{K} < S >$, e lo abbiamo chiamato $\mathbb{K}^n$:*

$$\mathbb{K} < \{1, ..., n\} >= \mathbb{K}^n$$

In questa identificazione le funzioni $e_i \in \mathbb{K} < S >$ corrispondono esattamente ai vettori della base standard di $\mathbb{K}^n$, che avevamo indicato con lo stesso simbolo.

Proposizione 1. *L'insieme $\beta_{st} = \{e_s \mid s \in S\}$ è una base di $\mathbb{K} < S >$.*

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che l'insieme β_{st} è indipendente e genera $\mathbb{K} < S >$. Per l'indipendenza, supponiamo che esista una combinazione lineare uguale a zero:

$$\alpha_1 e_{s_1} + \cdots + \alpha_k e_{s_k} = 0$$

Valutiamo questa funzione in $s \in S$:

$$\alpha_1 e_{s_1}(s) + \cdots + \alpha_k e_{s_k}(s) = 0$$

Se prendiamo in particolare s uguale ad uno degli s_i che compaiono nella sommatoria, otteniamo $\alpha_i = 0$, e quindi tutti i coefficienti sono zero, e l'insieme e' indipendente. Per dimostrare che β_{st} genera, prendiamo un suo elemento qualsiasi f, e sia $Supp(f) = \{s_1, ..., s_k\}$. Si ha allora che

$$f = f(s_1)e_{s_1} + \cdots + f(s_k)e_{s_k}$$

(verificate questa equazione per esercizio) e quindi β_{st} genera. □

Il sequente teorema è una formulazione leggermente piu' astratta del teorema, che abbiamo già visto, che dice che una applicazione lineare è determinata dal suo valore su di una base, e che dati valori arbitrari su di una base, esiste sempre una (ed una sola) applicazione lineare che assume tali valori.

Teorema 1. *Dati un insieme S, un campo $\mathbb{K}$ ed un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, la funzione naturale Φ,*

$$\Phi \ : \ Lin_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} < S >, V) \ \to \ Funzioni(S, V)$$

dall'insieme delle applicazioni lineari da $\mathbb{K} < S >$ a V all'insieme delle funzioni da S a V definita come $\Phi(L)(s) = L(e_s)$ è una bigezione.

Dimostrazione La funzione Φ è chiaramente iniettiva, perche' se $\Phi(L_1) = \Phi(L_2)$ allora L_1 e L_2 devono coincidere sull'insieme β_{st}, che è una base di $\mathbb{K} < S >$, e quindi sono la stessa applicazione lineare. Per vedere che Φ è surgettiva, Sia $g : S \to V$ una funzione qualsiasi. Definiamo allora $L : \mathbb{K} < S > \to V$ imponendo che $L(e_s) = g(s)$. Questo determina una (ed una sola) applicazione lineare da $\mathbb{K} < S >$ a V, dato che $\{e_s \mid s \in S\}$ è una base di $\mathbb{K} < S >$. □

Definizione 2. *Dati due spazi vettoriali V, W, il prodotto tensoriale $V \otimes W$ di V e W è il quoziente dello spazio vettoriale libero sull'insieme $V \times W$ delle coppie di elementi in V e in W rispetto al sottospazio $N_{V\times W}$ generato dagli elementi del tipo*

$$N_{V\times W} = \left\langle e_{(av_1+bv_2,w)} - ae_{(v_1,w)} - be_{(v_2,w)} \mid a, b \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in V, w \in W \right\rangle \ +$$
$$\left\langle e_{(v,aw_1+bw_2)} - ae_{(v,w_1)} - be_{(v,w_w)} \mid a, b \in \mathbb{K}, v \in V, w_1, w_2 \in W \right\rangle$$
$$V \otimes W = \mathbb{K} < V \times W > /N_{V\times W}$$

L'immagine del vettore $e_{(v,w)}$ in $V \otimes W$ si indica con $v \otimes w$. Risulta determinata anche una funzione naturale $\overline{\Psi}_{V\otimes W} : V \times W \to V \otimes W$, data dalla composizione dalla funzione naturale $\Psi_{V\times W} \ : \ V \times W \to \mathbb{K} < V \times W >$ e della applicazione lineare quoziente $\mathbb{K} < V \times W > \to \ V \otimes W$.

Proposizione 2. *Siano $\alpha = \{v_1, .., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\}$ due basi, di V e W rispettivamente. Allora l'insieme*

$$\{v_i \otimes w_j \mid i \in \{1, .., n\}, \ j \in \{1, ..., m\}\}$$

genera $V \otimes W$, che quindi ha dimensione minore o uguale a $dim(V)dim(W)$.

Dimostrazione Esercizio. □

Gli elementi di $V \otimes W$ saranno quindi della forma $\sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j$ al variare dei coefficienti α_{ij}.

Proposizione 3. *Siano V, W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. La funzione naturale*

$$\overline{\Psi}_{V\otimes W} \ : \ V \times W \to V \otimes W$$

è una funzione bilineare, e qualunque funzione bilineare $g : V \times W \to U$ in un terzo spazio vettoriale può essere fattorizzata in modo unico tramite una funzione lineare G e $\overline{\Psi}_{V\otimes W}$. In simboli,

$$\exists! \ G \ : V \otimes W \to U \ : \ g = G \circ \Psi_{V\times W}$$

Dimostrazione Data una funzione (bilineare, ma per ora non sfrutteremo questa proprietà) $g \ : \ V \times W \to U$, esiste ed è unica una applicazione lineare

$$\tilde{G} : \mathbb{K} < V \times W > \to \ U$$

tale che $g = \tilde{G} \circ \Psi_{V\times W}$. Per finire la dimostrazione della proposizione basta dimostrare che l'applicazione $\tilde{G}$ ne induce una (necessariamente unica, dimostrare questo punto per esercizio) da $V \otimes W$ a U. Quest'ultimo fatto a sua volta è equivalente alla richiesta che $\tilde{G}(N_{V\times W}) = \{0\}$. Per verificarlo, calcoliamo l'immagine tramite $\tilde{G}$ dei generatori di $N_{V\times W}$:

$$\tilde{G}(e_{(av_1+bv_2,w)} - ae_{(v_1,w)} - be_{(v_2,w)}) = \tilde{G}(e_{(av_1+bv_2,w)}) - a\tilde{G}(e_{(v_1,w)}) - b\tilde{G}(e_{(v_2,w)}) =$$

$$= g(av_1 + bv_2, w) - a(g(v_1, w) - bg(v_2, w) = 0$$

Per l'ultima equazione abbiamo fruttato il fatto che g è bilineare. Analogamente si dimostra che

$$\tilde{G}(e_{(av_1+bv_2,w)} - ae_{(v_1,w)} - be_{(v_2,w)}) = 0$$

e quindi $\tilde{G}(N_{V\times W}) = \{0\}$ come volevamo dimostrare. $\square$

Corollario 1.

$$Bil(V \times W) \cong (V \otimes W)^\vee$$

e quindi $V \otimes W$ ha dimensione uguale a quella di $Bil(V \times W)$, che è pari a $dim(V)dim(W)$. Questo implica anche che l'insieme di generatori identificato nella proposizione 2 è una base di $V \otimes W$.

Dimostrazione L'unica cosa da dimostrare e' l'affermazione sulla dimensione di $Bil(V \times W)$. Questo pero' segue immediatamente dal ragionamento usato per calcolare la dimensione delle forme bilineari su di uno spazio fissato, $Bil(V)$. $\square$

Definizione 3.

$$\begin{aligned} Bil(V \times W, U) &= \{f : V \times W \to U \mid f \text{ è bilineare}\} \\ Bil(V \times W) &= Bil(V \times W, \mathbb{K}) \\ Bil(V) &= Bil(V \times V) \end{aligned}$$

La seguente proposizione è una generallizzazione diretta della Proposizione 3. Omettiamo la dimostrazione, che comunque è anch'essa una diretta generalizzazione di quella della proposizione 3.

Proposizione 4. *Dati spazi vettoriali $V_1, ..., V_n, U$ sul campo $\mathbb{K}$, ogni applicazione multilineare*

$$f : V_1 \times \cdots \times V_n \to U$$

puo' essere fattorizzata in modo unico tramite una applicazione lineare

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to U$$

In particolare,

$$Alt^n(V) \subset \left(V^{\otimes n}\right)^\vee$$

Definizione 4. *Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita ed un intero positivo $n \in \mathbb{N}$,*

$$Alt^n(V) = \{f : V \times \cdots V \to \mathbb{K} \mid f \text{ è multilineare alternante}\}$$

Definizione 5. *Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita ed un intero positivo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\bigwedge^n V = Alt^n(V^\vee) \subset \left((V^\vee)^{\otimes n}\right)^\vee = V^{\otimes n}$$

Teorema 2. *Dato uno spazio vettoriale V e un intero positivo $n \in \mathbb{N}$, si ha che*

$$\bigwedge^n V = \{\phi \in \left(V^{\otimes n}\right)^\vee \mid \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \ \sigma(\phi) = \epsilon(\sigma)\phi\}$$

Dimostrazione Omettiamo la dimostrazione di questo teorema. $\square$

Definizione 6. *Dato uno spazio vettoriale V e un intero positivo $n \in \mathbb{N}$, definiamo l'applicazione lineare*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma \ : \ V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$$

tramite l'azione naturale $\mathcal{S}_n \to End_{\mathbb{K}}\left(V^{\otimes n}\right)$

Lemma 1. *La funzione segnatura $\epsilon : \mathcal{S}_n \to \{1, -1\}$ è un omomorfismo di gruppi (prendento su $-1, 1$ la struttura di gruppo moltiplicativo), ovvero*

$$\epsilon(\sigma \circ \tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$$

Dimostrazione Se σ si puo' scrivere come il prodotto di h trasposizioni, e τ si puo' scrivere come il prodotto di k trasposizioni, allora la composizione $\sigma \circ \tau$ si puo' scrivere come il prodotto di $h+k$ trasposizioni. La tesi segue allora dall'osservazione che la parità di $h+k$ è uguale alla somma delle parità di h e di k. □

Lemma 2. *L'applicazione lineare $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma$ è un operatore di proiezione da $V^{\otimes n}$ al suo sottospazio $\bigwedge^n V$.*

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare i seguenti tre fatti:

$$\bigwedge^n V = Im\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma\right),\ V^{\otimes n} = Ker\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma\right) \oplus \bigwedge^n V,$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma|_{\bigwedge^n V} = Id$$

Per l'inclusione $\supset$ relativa alla prima uguaglianza da dimostrare, prendiamo n vettori qualsiasi $w_1, .., w_n$ in V, una qualsiasi permutazione $\tau \in \mathcal{S}_n$ e calcoliamo

$$\tau\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)(\tau \circ \sigma)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau)\epsilon(\tau \circ \sigma)\tau \circ \sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = \epsilon(\tau)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau \circ \sigma)\tau \circ \sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) =$$

$$\epsilon(\tau)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma')\sigma'(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = \epsilon(\tau)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)$$

L'inclusione segue quindi dal Teorema 2.
Dimostriamo ora l'ultima equazione: se $\phi \in \bigwedge^n V$, allora sempre per il teorema 2 si ha che

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(\phi) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)^2\phi = \frac{1}{n!}|\mathcal{S}_n|\phi = \phi$$

Combinando questo fatto con l'inclusione dimostrata prima, si ha anche l'altra inclusione relativa alla prima equazione da dimostrare. Dalla prima e dalla terza equazione combinate segue poi immediatamente anche la seconda equazione (esercizio). □

Teorema 3. *La dimensione dello spazio vettoriale $\bigwedge^n V$ è uguale al numero di sottoinsiemi di cardinalità n in un insieme di cardinalità $dim(V)$,*

$$dim\left(\bigwedge^n V\right) = \binom{dim(V)}{n}$$

Dimostrazione Dati $w_1, ...w_n$ in V, definiamo

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \in \bigwedge^n V$$

Si ha allora che se $\tau \in \mathcal{S}_n$,

$$w_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge w_{\tau(n)} = \epsilon(\tau) w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$$

(esercizio). Fissiamo ora una base $v_1, .., v_m$ di V. Si ha allora per il lemma precedente (e per la descrizione della base di $V^{\otimes n}$ fatta in precedenza) che gli elementi del tipo

$$v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_n}$$

al variare di $i_1, .., i_n$ in $\{1, .., m\}$ generano tutto $\bigwedge^n V$. Per l'osservazione iniziale, si ha anche che si possono prendere $i_1 < i_2 < \cdots i_n$. Dato che una scelta di $i_1 < i_2 < \cdots i_n$ in $\{1, .., m\}$ equivale alla scelta di un sottoinsieme di $\{1, .., m\}$, per concludere la dimostrazione basta quindi dimostrare che al variare di $i_1 < i_2 < \cdots i_n$ i vettori $v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_n}$ sono tutti indipendenti fra loro. Questo però segue dal fatto che per due scelte distinte $i_1 < i_2 < \cdots i_n$ e $j_1 < j_2 < \cdots j_n$ gli addendi che formano il vettore $v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_n}$ sono tutti distinti da quelli che formano il vettore $v_{i_1} \wedge \cdots v_{i_n}$. $\square$

Pensando alle colonne di una matrice in $M_n(\mathbb{K})$ come a vettori di $\mathbb{K}^n$, si ha una identificazione di spazi vettoriali $M_n(\mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^n)^n$, e quindi il determinante diventa una applicazione non nulla

$$det : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$$

che è multilineare alternante, cioè un elemento di $\bigwedge^n \left((\mathbb{K}^n)^\vee\right)$. Dato che questo spazio ha dimesione uno per il teorema precedente, si ha quindi

$$\bigwedge^n \left((\mathbb{K}^n)^\vee\right) =< \ det \ >$$