

PROVA SCRITTA DI ANALISI del 5 luglio 2005

NOME (scrivere stampatello):

COGNOME (scrivere stampatello):

NUMERO DI MATRICOLA:

NUMERO DI RIGA:

(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)

NUMERO DI COLONNA:

(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. La prima parte corrisponde al materiale svolto prima della prima prova intermedia, la seconda parte corrisponde al materiale svolto prima della seconda prova intermedia.

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$

Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$

(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

Esercizio I-1

Si dimostri per induzione su n che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $4^{2n} < 3^{3n}$

Esercizio I-2

Si calcoli (mostrando i passaggi intermedi) l'integrale

$$\int_{v-1}^{w+2} (wx^2 + 2(1-w)x^3 + v(1 + \tan^2(x+2)) + (1-v)(1 + \cot^2(x-2))) dx$$

esercizio I-3

Si calcoli la lunghezza dell'insieme

$$A = ((0, 1) \cup [v + 2, w + 4]) \cap \mathbb{Q} \cup (-v - 2, w + 3] \cup [1, 2)$$

Esercizio II-1

Si calcoli (mostrando tutti i passaggi intermedi) il limite

$$\lim_{x \rightarrow w+1} \frac{\sin(x-w-1)\tan(x-v-2)}{\cos(x-w-1)(x-w-1)}$$

Esercizio II-2

Sia data la funzione $f(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = (w + 2)e^{(x-1)} + (v + 2)\log(x) \text{ per } x \in (0, 1]$$

$$f(x) = (w + 2)x + (v + 2)(x - 1) \text{ per } x \in (1, +\infty)$$

- a) Si dimostri che f è continua in 1.
- b) Si dimostri che f è derivabile in 1.

Esercizio II-3

Si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = v\cos(e^x) + (1 - v)\sin(\log(x)) + w\tan(x^2) + (1 - w)\cot(x^3)$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI del 5 luglio 2005 - parte teorica**NOME** (scrivere stampatello):**COGNOME** (scrivere stampatello):**NUMERO DI MATRICOLA:****NUMERO DI RIGA:**

(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)

NUMERO DI COLONNA:

(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$ **Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$** **(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);**

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. Questa parte del compito verrà valutata solo se c'è già la sufficienza nelle prime due, ed è di natura più teorica.**Esercizio III-1**Si dimostri che per tutti gli $a \in \mathbb{R}$ tali che $a \geq \sqrt{3} + 1$ vale

$$(1 + a)^{20} \leq a^{30}$$

Esercizio III-2

Si calcoli il polinomio di Taylor in $1 + v + w$ di ordine 3 della funzione

$$f(x) = v \tan(x^3) + (1 - v) \cot(x^2) + w e^x + (1 - w) \log(x)$$

Esercizio III-3

Si trovi una funzione a scala $f : [\frac{u+v}{4}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in [\frac{u+v}{4}, 1] f^2(x) \leq x$ e inoltre

$$\int f(x)dx \geq \frac{3}{4} - \frac{u+v}{4}$$

Esercizio III-4

Si dimostri che se una funzione $f : [u, v + 5] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, non negativa, e vale uno su $[u + 1, u + 2] \setminus \mathbb{Q}$ allora

$$\int f(x)dx \geq 1$$