COMPITO DI ANALISI MATEMATICA DELL'11 FEBBRAIO 2004

DOCENTE: MICHELE GRASSI

Nome:
Numero di matricola:
Questa versione è per chi non ha ottenuto esoneri con i compitini. Gli esercizi con un asterisco sono più difficili ed è quindi meglio farli solo dopo avere concluso gli altri. È meglio inoltre concentrarsi prima sulle prime due parti.

Prima parte (relativa al materiale svolto prima del primo compitino):

(1) Si dimostri per induzione su n che per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ vale

$$1 + 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1}$$

(2) Sia $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \ulcorner x^3 \urcorner$ (più piccolo intero maggiore o uguale a x^3).
a) Si dimostri che f è a scala su $[1,2]$.
b) Si calcoli l'integrale

$$\int_1^2 f(x)dx$$

Seconda Parte (relativa al materiale svolto fra il primo e il secondo compitino):

(1) a) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine tre centrato in 0 della funzione $f(x) = cos(x^2)$.
b) Si calcoli la derivata in 2 del polinomio del punto precedente.

(2) Sia $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^3 g(x)dx$$

(3) Sia $f(x) = tan(x)$ (definita su $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)
a) Si calcoli la funzione derivata di $f(x)$.

b) Si calcoli

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan(x))^2 dx$$

Terza parte (esercizi più teorici, utili se si è ottenuta l'ammissione all'orale con le prime due parti o con i compitini):

(1) Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$ per $x \in (0,1]$, e $f(0) = 0$.
a) Si dimostri che la funzione $f(x)$ non è a scala su $[0,1]$.
b) Si dimostri che la funzione $f(x)$ non è integrabile su $[0,1]$

(2) Sia $a_n = n^n$, e sia $b_n = e^n$.
a) Si dimostri che $a_3 > b_3$.
b) Si dimostri per induzione che $a_n > b_n$ per tutti gli $n \geq 3$

(3) Sia $f(x) = x^2$ su $[0,1]$. Si trovino due funzioni a scala g, h tali che $g \leq f \leq h$ e tali che inoltre

$$\int_0^1 (h(x) - g(x))dx < \frac{1}{10}$$