Esercizi per il Corso di Istituzioni di Matematica

1) Calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto P assegnato :

$a)$ $f(x) = \sin(2x)\sqrt{x^2+1}$, $P = (0,0)$; $b)$ $f(x) = x\log_2(x)$, $P = (1,0)$;

$c)$ $f(x) = \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{x+2}$, $P = (0, \frac{1}{2})$; $d)$ $f(x) = \dfrac{x^3+2x-4}{x^2+x+4}$, $P = (0,-1)$.

2) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$a)$ $f(x) = (x+1)^{x^2}$; $b)$ $f(x) = \log(\log_2(x))$; $c)$ $f(x) = 4^{\cos(3x)} + \sqrt[3]{(x+7)^2}$;

$d)$ $f(x) = \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}$; $e)$ $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{2x+\arccos(-x)}$; $f)$ $f(x) = \log_3(x^x)$.

3) Stabilire se le funzioni sotto sono derivabili nel punto x_0 assegnato e nel caso non lo siano dire se in x_0 presentino punti angolosi, di cuspide o a tangente verticale.

$a)$ $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$; $b)$ $f(x) = |x-2|$, $x_0 = 1$;

$c)$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} & x < 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$; $d)$ $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ \cos(x) & x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

$e)$ $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + 2^x$, $x_0 = 0$; $f)$ $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq \pi \\ 1 & x < \pi \end{cases}$, $x_0 = \pi$.

4) Disegnare il grafico delle funzioni sopra in un intorno del punto assegnato.

5) Determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali od obliqui delle funzioni:

$a)$ $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x+3}$; $b)$ $f(x) = \dfrac{4^{-x}}{e^x+x^2}$; $c)$ $f(x) = \sqrt{x^2+3}$;

$d)$ $f(x) = |2-x| - \dfrac{1}{x}$; $e)$ $f(x) = \dfrac{x^3+2x-4}{x^2+x+4}$; $f)$ $f(x) = \arctan(xe^{-x})$.

Per gli asintoti verticali $x = x_0$ determinare il limite di f a destra e sinistra del punto x_0.

6) Determinare su quali intervalli le funzioni sotto sono crescenti/decrescenti:

$$a)\ f(x) = \arcsin(x^2 - 2x - 4); \quad b)\ f(x) = xe^{-2x^2};$$

$$c)\ f(x) = \log(\cos(x) + \sin(x)); \quad d)\ f(x) = \frac{x^2 + 6x + 6}{x + 1}.$$

7) Determinare eventuali punti di massimo e minimo locale delle funzioni al punto sopra e stabilire se sono anche massimi o minimi assoluti.

8) Determinare su quali intervalli le funzioni sotto sono convesse:

$$a)\ f(x) = x - \sin(x + 4); \qquad b)\ f(x) = \arctan(1 - x);$$

$$c)\ f(x) = 6x^2 - x^3 - 6 + 2x; \quad d)\ f(x) = xe^{-2x^2}.$$

9) Con le informazioni sopra disegnare un grafico approssimativo di

$$a)\ f(x) = x - \sin(x + 4); \quad b)\ f(x) = \arctan(1 - x); \quad c)\ f(x) = 6x^2 - x^3 - 6 + 2x;$$

$$d)\ f(x) = xe^{-2x^2}; \qquad e)\ f(x) = \frac{x^2 + 6x + 6}{x + 1}; \qquad f)\ f(x) = \arcsin(x^2 - 2x - 4).$$

Nota. Punti angolosi, di cuspide o a tangente verticale sono tutti quei punti x_0 per cui esistono (in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) i limiti destri e sinistri del rapporto incrementale in x_0 (derivate destre e sinistre anche con pendenza anche infinita).
I punti a tangente verticale sono quelli tali che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ oppure } = -\infty,$$

esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$.
I punti di cuspide sono quelli tali che

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty.$$

esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$.
I punti angolosi sono quelli tali che almeno uno dei due limiti destri o sinistri è un valore reale e l'altro sta in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, i.e.

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R} \text{ e/o } \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L' \in \mathbb{R},$$

esempio: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, oppure $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$, $f(x) = \sin(x)$ per $x < 0$.