CORSO DI LAUREA IN FISICA

ANALISI MATEMATICA I

BREVI RICHIAMI DELLA TEORIA DEI LIMITI

1. Confronto di infinitesimi.
Sia A sottoinsieme di $\mathbb{R}$, sia x_0 punto di accumulazione di A nella topologia di $\overline{\mathbb{R}}$ (quindi può anche essere $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ e siano f e g due funzioni reali definite in A le quali siano *infinitesime* per x che tende a x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Definizione 1. *Diciamo che f e g sono* **infinitesime (per x che tende a x_0) dello stesso ordine** *se esistono un numero reale $K \neq 0$, un intorno V di x_0 ed una funzione reale h, definita su $V \cap A \setminus \{x_0\}$ e* **infinitesima per x che tende a x_0**, *tali che*

$$f(x) = g(x)\{K + h(x)\}, \quad \forall\, x \in V \cap A \setminus \cap\{x_0\} \tag{1}$$

Definizione 2. *Diciamo che f è un* **infinitesimo per x che tende a x_0 di ordine superiore a g,** *oppure g* **è un infinitesimo di ordine inferiore a f** *se esiste un intorno V di x_0 ed una funzione h definita su $V \cap A$ e infinitesima per x che tende a x_0 tali che*

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad \forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}. \tag{2}$$

Facciamo alcune considerazioni in merito a queste definizioni. Innanzitutto è ragionevole attendersi che accanto alla relazione (1) debba sussistere una analoga relazione in cui f e g sono “scambiate di posto”. In effetti è così. Supponiamo che valga la relazione (1); per le ipotesi fatte

$$\lim_{x \to x_0} \{K + h(x)\} = K \neq 0$$

e quindi esiste un intorno U di x_0 tale che

$$K + h(x) \neq 0 \quad \forall x \in U \cap V \cap A \setminus \{x_0\} = W \cap A \setminus \{x_0\}$$

(si è posto $W = U \cap V$; W è ancora intorno di x_0). Allora in $W \cap A \setminus \{x_0\}$ è definita la funzione $\dfrac{1}{K + h(x)}$ e sussiste la relazione

$$\frac{1}{K + h(x)} = \frac{1}{K} - \frac{h(x)}{K[K + h(x)]}, \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}. \tag{3}$$

Da (1) e (3) segue che

$$g(x) = f(x) \left\{ \frac{1}{K} + v(x) \right\} \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}$$

dove $\dfrac{-h(x)}{K[K+h(x)]}$ è una funzione definita in $W \cap A \setminus \{x_0\}$ e infinitesima per x che tende a x_0.
Dalla relazione (1) segue che f si annulla in un punto $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ se e solo se g si annulla in x e quindi, in un intorno di x_0, f e g sono entrambe diverse da zero oppure "hanno gli stessi zeri". Supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno di x_0. In questa ipotesi

Proposizione 1. *f e g sono* **infinitesimi dello stesso ordine** *per x che tende a x_0 se e solo se la funzione $\dfrac{f}{g}$, che è definita in un intorno di x_0, è convergente per x che tende a x_0 ed il limite è un numero reale diverso da 0*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; = \; K \neq 0 \tag{4}$$

Questa proposizione è assai utile perchè suggerisce un procedimento semplice per stabilire se due infinitesimi sono dello stesso ordine. La dimostrazione di questa proposizione è elementare. Supponiamo che valga la (1) e supponiamo che in un intorno di x_0 sia $f \neq 0$ e $g \neq 0$ allora esiste un intorno W di x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \; = \; K + h(x) \quad \forall x \in W \cap A \setminus \{x_0\}$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; = \; K \neq 0$$

Viceversa, supponiamo che f e g siano diverse da 0 in un intorno U di x_0 e che valga la (4). Per $x \in U \cap A$ possiamo scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} \; = \; K + \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - K \right\} = K + h(x)$$

e quindi

$$f(x) = g(x)\{K + h(x)\}$$

Per l'ipotesi (4), la funzione $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x} - K$ è infinitesima per x che tende a x_0.
Considerazioni della stessa natura si possono fare in relazione alla Definizione 2. Supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno U di x_0 e quindi le funzioni $\dfrac{f}{g}$ e $\dfrac{g}{f}$ sono definite per $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$. In tali ipotesi vale la seguente proposizione

Proposizione 2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè f* **sia infinitesima di ordine superiore a** *g è che valga*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty \tag{5}$$

Infatti se f e g sono diverse da zero in un intorno di x_0 e se (2) è vera, allora esiste un intorno W di x_0 tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x), \quad \forall x \in W \cap A$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

Viceversa supponiamo che f e g siano diverse da zero in un intorno U di x_0 e che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Per $x \in U \cap A$ possiamo scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = g(x) \cdot h(x)$$

e la funzione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è infitinitesima per x che tende a x_0.

ESEMPIO 1

Consideriamo le funzioni $f : x \to \sin x$ e $g : x \to x$ $x \in \mathbb{R}$ ed entrambe infinitesime per x che tende a 0. f e g sono infintesime dello stesso ordine, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ESEMPIO 2

Siano $A = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$. f e g sono infinitesime per $x \to 0$ e f è infinitesimo di ordine superiore a g; infatti $\forall x \in [-1, 1]$ si può scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot x.$$

Altra verifica

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

ESEMPIO 3

Siano $A = (0, 1]$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$. f e g sono infinitesime per x che tende a zero ma f e g sono infinitesimi non confrontabili tra loro.

Siano f e g due funzioni reali definite in $A \subset \mathbb{R}$, entrambe infinitesime per x che tende a x_0, e sia α un numero reale positivo. Supponiamo che in un intorno di x_0 sia definita la funzione $x \to [g(x)]^\alpha$.

Definizione 3. *Si dice che f è un infinitesimo per x che tende a x_0 di ordine α rispetto a g se f e g^α sono infinitesimi dello stesso ordine.*

Se ciò avviene devono esistere una costante $K \neq 0$, un intorno U di x_0 ed una funzione h definita in $U \cap A \setminus \{x_0\}$ infinitesima per x che tende a x_0 tali che

$$f(x) = g^\alpha(x)[K + h(x)] \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \tag{6}$$

o anche
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = K. \tag{7}$$
In tal caso diremo che $K\,g^\alpha(x)$ è la parte principale dell'infinitesimo f rispetto all'infinitesimo all'infinitesimo g. Se esistono due numeri K e α che rendono vera la (6) (o la (7)) essi sono univocamente determinati.

ESEMPIO 4

Siano $A = [0,1]$, $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x$.
f e g sono infinitesime per x che tende a zero
f è di ordine 2 rispetto a g e la parte principale di f rispetto a g è $\frac{1}{2}x^2$. Infatti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Il seguente teorema è molto utile nello studio del limite del rapporto $\frac{f}{g}$ nel caso di indeterminazione $\frac{0}{0}$.

Teorema 1. Principio di sostituzione degli infinitesimi
Siano f, g, F, G quattro funzioni definite in $A \subset \mathbb{R}$ e infinitesime per x che tende a x_0. Supponiamo che f, g, $f+F$, $g+G$ siano diverse da zero in un intorno di x_0 e inoltre

1. *F è infinitesimo di ordine superiore ad f,*
2. *G è infinitesimo di ordine superiore a g.*

In tali ipotesi
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} = L \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad L \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{8}$$
Dimostrazione.
Esiste un introno U di x_0 tale che
$$f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0,\ f(x)+F(x) \neq 0,\ g(x)+G(x) \neq 0, \quad \forall x \in U \cap A \setminus \{x_0\}.$$
Per ogni $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ risulta
$$\frac{f(x)+F(x)}{g(x)+G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1+\frac{F(x)}{f(x)}}{1+\frac{G(x)}{g(x)}}. \tag{9}$$
Poiché $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{G(x)}{g(x)} = 0$, si ha che
$$\lim_{x\to x_0} \frac{1+\frac{F(x)}{f(x)}}{1+\frac{G(x)}{g(x)}} = 1. \tag{10}$$

Da (9) e (10) segue la tesi.

ESEMPIO 5
Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x}}$$

Poiché

1. x^2 è un infinitesimo (per $x \to 0$) di ordine superiore a $\sqrt{x}$.

2. $2x$ è un infinitesimo (per $x \to 0$) di ordine superiore a $\sqrt{x}$,

risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

ESEMPIO 6
Siano $f(x) = \sqrt{|x + x^2|}$ e $g(x) = 2\sqrt{|x|} + x^2$; f e g definite $\mathbb{R}$. Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x + x^2|}}{2\sqrt{|x|} + x^2}.$$

Consideriamo l'infinitesimo (per $x \to 0$)

$$h(x) = |x|$$

f è di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto ad h in quanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{h(x)}} = 1 \neq 0$$

g è di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto ad h in quando

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}} = 2 \neq 0$$

Ne segue che in $x = 0$ sarà

$$f(x) = \sqrt{|x|} + F(x), \quad g(x) = 2\sqrt{|x|} + G(x)$$

con F e G infinitesimi di ordine superiore a f e g rispettivamente. Conclusione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x))}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2}.$$

2. Il simbolo di Landau

Siano $f, g : A \to R$, A intervallo di R e x_0 punto di accumulazione per A. Supponiamo inoltre che f, g siano infinitesime per x che tende a x_0.

Se f è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a g (per x che tende a x_0) ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \; = \; 0$$

scriveremo $f(x) = o(g(x))$ (che si legge f è o-piccolo di g per x che tende a x_0). Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

ESEMPIO 1

$$\sin x - x = o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0$$

perché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} \; = \; 0 \quad \text{in quanto} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Possimo scrivere quindi

$$\sin x = x + o(x). \tag{11}$$

In maniera analoga si deducono le seguenti eguaglianze (per x **che tende a zero)**.

$$\begin{aligned}
&a^x = 1 + \log a \; x + o(x) && \text{perché} \; \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \\
&e^x = 1 + x + o(x) && \text{perché} \; \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\
&\log(1 + x) \; = \; x + o(x) && \text{perché} \; \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \\
&\cos x = 1 - \tfrac{1}{2} \; x^2 + o(x^2) && \text{perché} \; \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\
&\tan x \; = \; x + o(x) && \text{perché} \; \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \; = \; 1
\end{aligned} \tag{12}$$

Analogamente

$$(1 + x)^\alpha \; = \; 1 \; + \; \alpha \, x \; + \; o(x)$$

perchè

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\,\log(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha\log(1+x)+o(\alpha\log(1+x))-1}{x}=$$

(per il Principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\log(1+x)}{x}=\alpha$$

Nel limite sopra abbiamo posto $y=\alpha\log(1+x)$ ed utilizzato lo sviluppo $e^y=1+y+o(y)$(vedi gli sviluppi (12)), tenuto conto che per $x\to 0$ si ha che $y\to 0$.
Si osservi che con la scrittura $f(x)=o(g(x))$ non si indica una eguaglianza tra funzioni ma l'appartenenza di f ad un insieme di funzioni. Sarebbe quindi più corretto scrivere $f\in o(g)$. Ad esempio, scriveremo $x^3=o(x)$, $x^4=o(x)$ (per $x\to 0$) perché $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0$ e $\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x}=0$, naturalmente, per quanto osservato sopra, non potremo applicare in questo caso la proprietà transitiva dell'uguaglianza e dedurre che le funzioni x^3 e x^4 sono uguali. Nel calcolo dei limiti è utile disporre di alcune regole di calcolo con gli o-piccoli. Riportiamo qui sotto le principali nel caso degli $o(x^m)$ per $x\to 0$. In maniera analoga si procederà negli altri casi.

$$k\,o(x^n)=o(x^n) \tag{13}$$

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n),\quad n\le m \tag{14}$$

$$o(x^n)\;o(x^m)=o(x^{m+n}) \tag{15}$$

$$[o(x^n)]^m=o(x^{mn}) \tag{16}$$

$$x^m\,o(x^n)=o(x^{m+n}) \tag{17}$$

$$o(x^n+o(x^n))=o(x^n) \tag{18}$$

Dimostriamo (13)

$$\lim_{x\to 0}\frac{k\,o(x^n)}{x^n}=k\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$$

Dimostriamo (14)

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)\pm o(x^m)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}\pm\frac{o(x^m)}{x^n}=\lim_{x\to 0}0\pm\frac{o(x^m)}{x^m}\,x^{m-n}=0$$

Dimostriamo (15)

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)o(x^m)}{x^nx^m}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}\frac{o(x^m)}{x^m}=0$$

Dimostriamo (16)

$$\lim_{x\to 0} \frac{[o(x^n)]^m}{x^{nm}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{o(x^n)}{x^n}\right]^m = 0$$

Dimostriamo (17)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^m\, o(x^n)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Dimostriamo (18)

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n + o(x^n))}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n + o(x^n))}{x^n + o(x^n)}\ \frac{x^n + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} 0 \cdot \left(1 + \frac{o(x^n)}{x^n}\right) = 0.$$

ESERCIZI SUI LIMITI 1

CALCOLARE IL VALORE DEI SEGUENTI LIMITI

(1) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ (2) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ (3) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ (5) $\lim_{x\to+\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right)^{x}$ (6) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

(7) $\lim_{x\to0+} \left(\frac{2^x+3^x-2}{x}\right)$ (8) $\lim_{x\to0+} \left(\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}\right)$ (9) $\lim_{x\to0+} x^x$

(10) $\lim_{x\to0+} x^{x^x}$ (11) $\lim_{x\to+\infty} \left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right) x$

(12) $\lim_{x\to0+} \frac{a^{a^x}-a}{a^x-1}$, $(a\neq1, a>0)$

(13) $\lim_{x\to+\infty} x\ \log\left[\frac{\log(x+1)}{\log x}\right]$ (14) $\lim_{x\to a} \frac{x^a-a^x}{\sin(x-a)}$, $(a>0)$ (15) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

(16) $\lim_{x\to0+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

(17) $\lim_{x\to0} \log\left(\frac{2^x-1}{4^x-2^x}\right)$ (18) $\lim_{x\to0} \log\left(\frac{2^x-1}{4^x-3^x}\right)$

(19) $\lim_{x\to0} \frac{4^x-2^{x+1}+1}{x^2}$ (20) $\lim_{x\to0+} \frac{\log(1+\sqrt{x^2+x})}{x}$ (21) $\lim_{x\to0} \frac{\tan^2 x-\sin^2 x}{x^4}$

(22) $\lim_{x\to+\infty} x\ \arctan\frac{1}{x}$ (23) $\lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arctan x}$ (24) $\lim_{x\to1+} \frac{1-x}{(\arccos x)^2}$

(25) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$ (26) $\lim_{x\to0} \frac{\arctan x}{x}$ (27) $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+\sin^2 x)}{1-\cos x}$

(28) $\lim_{x\to0+} \frac{e^{\sin x}-1}{\log(1+2\sqrt{x^2+x})}$ (29) $\lim_{x\to0} \frac{\cos[\log(1+x^2)]-1}{x^4}$ (30) $\lim_{x\to0+} x^{\frac{1}{x}}$

(31) $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^x-1}{x^2}$ (32) $\lim_{x\to0} \frac{\log\cos x}{x^2}$ (33) $\lim_{x\to0} \frac{(\cos x)^x-1}{x^3}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}$ (35) $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{\log x}}-1\right) x$

(36) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\sin\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}{\log(1+\sqrt{x}+x)}$ (37) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{1-\cos(\sin^2 x)}{\log(1+x^2)}$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\sin(1-\cos 2x)}{e^{3x^2}-1}$ (39) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\log(1+\sqrt{1-\cos x})}{1-e^{\sin 3x}}$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\log(1+\sqrt{x+x^3})}{\sqrt{x}\,[\log x-\log(\sin 2x)]}$ (41) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{e^{\sqrt{x+x^2}}-1}{\sqrt{x}\,[\log\tan 4x-\log x]}$

(42) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\sin(\sqrt{x^2+x^4})}{[2\log x-\log(1-\cos x)]\,x}$ (43) $\displaystyle\lim_{x\to0+} \frac{\tan(x+x^2)}{[\log x-\log(e^{2x}-1)]\sin x}$

(44) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{1+4x^2}-1}{(e^{-x}+1)\log(4-3\cos x)}$ (45) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1+\tan x)}{(\sqrt[3]{1+2x}-1)(2+\arctan x)}$

(46) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{\log(1+\sin^2 x)(2+\arcsin x)}$

Calcolare al variare di $x\in\mathbb{R}$ il valore dei seguenti limiti di successioni:

(47) $\lim_{n\to+\infty} \log\left(\cos\frac{1}{n}\right) n^x$ (48) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^x}-2^{n^x}}{n^x}$ (49) $\lim_{n\to+\infty} n^x \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(50) $\lim_{n\to+\infty} n^x \sin\frac{1}{n^3}$ (51) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{-x}\left(2^{n^x}-1\right)$ (52) $\lim_{n\to+\infty} n^x(\sqrt[n]{n}-1)$

RISULTATI

(1) e^3	(2) e^2	(3) $\frac{1}{e}$	(4) $+\infty$	(5) $+\infty$	(6) e^4
(7) $\log 6$	(8) $\frac{\log 2/3}{\log 3/4}$	(9) 1	(10) 0	(11) -1	(12) $a\log a$
(13) 0	(14) $a^a(1-\log a)$	(15) -1	(16) e	(17) 0	(18) $\log\frac{\log 2}{\log 4/3}$
(19) $(\log 2)^2$	(20) $+\infty$	(21) 1	(22) 1	(23) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	(24) $\frac{1}{2}$
(25) -1	(26) 1	(27) 2	(28) 0	(29) $-\frac{1}{2}$	(30) 0
(31) 1	(32) $-\frac{1}{2}$	(33) $-\frac{1}{2}$	(34) 1	(35) $+\infty$	(36) 1
(37) 0	(38) $\frac{2}{3}$	(39) $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$	(40) $-\frac{1}{\log 2}$	(41) $\frac{1}{\log 4}$	(42) $\frac{1}{\log 2}$
(43) $-\frac{1}{\log 2}$	(44) 1	(45) $\frac{3}{4}$	(46) $\frac{1}{2}$		

(47) $-\frac{1}{2}$ per $x=2$, $-\infty$ per $x>2$ 0 per $x<2$ (48) $+\infty$ per $x>0$, 1 per $x=0$, $\log\frac{3}{2}$ per $x<0$
(49) 1 per $x=1$, 0 per $x<1$, $+\infty$ per $x>1$ (50) 1 per $x=3$, 0 per $x<3$, $+\infty$ per $x>3$;
(51) $\log 2$ per $x<0$, $+\infty$ per $x>0$, 1 per $x=0$ (52) $+\infty$ per $x\geq 1$, 0 per $x<1$.

Svolgimento Esercizio (1)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \dfrac{1}{x}$ osserviamo che per $x \to +\infty$ $y \to 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y\to 0+} e^{3\frac{\log(1+y)}{y}} = e^3$$

perchè $\lim_{y\to 0} \dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$

Svolgimento Esercizio (2)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Posto $y = \dfrac{1}{x}$ osserviamo che per $x \to +\infty$ $y \to 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y\to 0+} e^{\frac{\log(1+2y)}{y}} == \lim_{y\to 0+} e^{\frac{2y+o(y)}{y}} = e^2$$

Perchè $\lim_{y\to 0+} \dfrac{2y+o(y)}{y} = \lim_{y\to 0+} \dfrac{2y}{y} = 2.$

Svolgimento Esercizio (3)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \dfrac{1}{x}$ osserviamo che per $x \to +\infty$ $y \to 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y\to 0+} e^{\frac{\log(1-y)}{y}} == \lim_{y\to 0+} e^{\frac{-y+o(y)}{y}} = e^{-1}$$

Perchè $\lim_{y\to 0+} \dfrac{-y+o(y)}{y} = \lim_{y\to 0+} \dfrac{-y}{y} = -1.$

Svolgimento Esercizio (4)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\log\left(3+\frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y = \dfrac{1}{x}$ osserviamo che per $x \to +\infty$ $y \to 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y\to 0+} e^{\frac{3\log(3+y)}{y}} = \lim_{y\to 0+} e^{\frac{3\log[3(1+\frac{y}{3})]}{y}} = = \lim_{y\to 0+} e^{\frac{3\log 3+3\log(1+\frac{y}{3})}{y}} == \lim_{y\to 0+} e^{\frac{\log 27}{y}+\frac{y+o(y)}{y}} = +\infty$$

Perchè $\lim_{y\to 0+} \dfrac{y+o(y)}{y} = \lim_{y\to 0+} \dfrac{y}{y} = 1$, mentre $\lim_{y\to 0+} e^{\frac{\log 27}{y}} = +\infty.$

Svolgimento Esercizio 5

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\log\left(3-\frac{1}{x}\right)}$$

Posto $y=\dfrac{1}{x}$ osserviamo che per $x\to+\infty$ $y\to 0+$, calcolare il limite proposto equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{y\to0+}e^{\frac{\log(3-y)}{y}}=\lim_{y\to0+}e^{\frac{\log[3(1-\frac{y}{3})]}{y}}==\lim_{y\to0+}e^{\frac{\log 3+\log(1-\frac{y}{3})}{y}}==\lim_{y\to0+}e^{\frac{\log 9}{y}+\frac{\frac{-y}{3}+o(y)}{y}}=+\infty$$

Perchè $\displaystyle\lim_{y\to0+}\frac{\frac{-y}{3}+o(y)}{y}=\lim_{y\to0+}\frac{-y}{3y}=-\frac{1}{3}$, mentre $\displaystyle\lim_{y\to0+}e^{\frac{\log 9}{y}}=+\infty$.

Svolgimento Esercizio 6

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]^{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\left(1+\frac{3}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\log(1+\frac{3}{x})}}{e^{x\log(1-\frac{1}{x})}}=e^4$$

Perchè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^3=1$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3=1$, mentre per il calcolo del limite relativo agli altri termini si procede come negli esercizi precedenti.

Svolgimento Esercizio 7

Utilizziamo nel limite lo sviluppo della funzione esponenziale (vedi gli sviluppi (12)) con $a=2$ e $a=3$:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1+x\log 2+o(x)+1+x\log 3+o(x)-2}{x}=$$

(Principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$=\lim_{x\to0+}\frac{x(\log 2+\log 3)}{x}=\log 6.$$

Svolgimento Esercizio 8 Utilizziamo nel limite lo sviluppo della funzione esponenziale (vedi gli sviluppi (12)) con $a=2$, $a=3$ e $a=4$:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1+x\log 2-1-x\log 3+o(x)}{1+x\log 3-1-x\log 4+o(x)}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $o(x)-o(x)=o(x)$. Quindi per il Principio di sostituzione degli infinitesimi:

$$\lim_{x\to0+}\frac{x(\log 2-\log 3)}{x(\log 3-\log 4)}=\frac{\log\frac{2}{3}}{\log\frac{3}{4}}.$$

Svolgimento Esercizio 9

Scriviamo il limite proposto nella forma $\displaystyle\lim_{x\to0+}e^{x\log x}=1$, perché $\lim_{x\to0+}x\log x=0$.

Svolgimento Esercizio 10

Scriviamo il limite proposto nella forma $\displaystyle\lim_{x\to0+}e^{x^x\log x}=0$, perché $\lim_{x\to0+}x^x=1$, (vedi Esercizio 9) e $\lim_{x\to0+}\log x=-\infty$, quindi il limite assume la forma $e^{-\infty}$ che dà 0.

Svolgimento Esercizio 11
I)metodo
Effettuiamo il seguente cambiamento di variabile: $y = \arctan x$. Quindi per $x \to +\infty$ si ha $y \to \dfrac{\pi}{2}^-$, il limite proposto diventa

$$\lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \tan y = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin y}{\cos y} = 1 \cdot \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{\cos y},$$

posto $z = y - \dfrac{\pi}{2}$ ed osservato che per $y \to \frac{\pi}{2}^-$ si che $z \to 0^-$, otteniamo

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{z}{\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} = - \lim_{z \to 0^-} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

II) metodo
Scriviamo il limite nella forma seguente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

in modo da ottenere una forma indeterminata, del tipo $\dfrac{0}{0}$, possiamo applicare il *Teorema dell'Hospital*:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{D\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)}{D\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Perché $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Esercizio 12
Scriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x \to 0} a \, \frac{a^{a^x - 1} - 1}{a^x - 1} = a \lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = a \, \log a,$$

perchè abbiamo posto $y = a^x - 1$, e per $x \to 0$, $y \to 0$, vedi i limiti notevoli (12)

Esercizio 13

$$\lim_{x \to +\infty} x \, \log \left\{ \frac{\log\left[x \, \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]}{\log x} \right\} = \lim_{x \to +\infty} x \, \log \left[\frac{\log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \, \log \left[1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x} \right] =$$

Si pone $y = \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\log x}$ e si osserva che per $x \to +\infty$ si ha che $y \to 0$, si può quindi utilizzare lo sviluppo $\log(1 + y) = y + o(y)$.

$$= \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x} + x\; o\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\log x} + \left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\log x}\right) o\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x}\right)\left[\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\log x}\right]^{-1} = 0$$

Perché $\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\log x} == \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log x} = 0.$

Esercizio 14

(I metodo) (Sviluppo di Taylor)

Osservato che per $x \to a$ si ha che $(x-a) \to 0$ possiamo utilizzare gli sviluppi (12) dell'esponenziale e del logaritmo:

$$a^a \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a - a^{x-a}}{x-a+o(x-a)} = a^a \lim_{x\to a} \frac{e^{a\log\frac{x}{a}} - 1 - (x-a)\log a + o(x-a)}{x-a+o(x-a)} =$$

$$= a^a \lim_{x\to a} \frac{1 + a\log\frac{x}{a} + o(\log\frac{x}{a}) - 1 - (x-a)\log a + o(x-a)}{x-a+o(x-a)} =$$

$$= a^a \lim_{x\to a} \frac{a\log\left(\frac{x-a}{a}+1\right) + o(\log\left[\frac{x-a}{a}+1\right]) - (x-a)\log a + o(x-a)}{x-a+o(x-a)} =$$

$$= a^a \lim_{x\to a} \frac{a\frac{x-a}{a} + a\,o(x-a) + o\left(\frac{x-a}{a} + o(x-a)\right) - (x-a)\log a + o(x-a)}{x-a+o(x-a)} =$$

Tenuto conto delle proprietà (14) e (18) degli o-piccoli ed utilizzando il Principio di sostituzione degli infinitesimi, si ha infine

$$= a^a \lim_{x\to a} \frac{x-a-(x-a)\log a + o(x-a)}{x-a+o(x-a)} = a^a \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(1-\log a)}{x-a} = a^a\ (1-\log a.)$$

(II metodo) (Teorema dell'Hospital, notare in questo caso la differenza!!)

$$\lim_{x\to a} \frac{D(x^a - a^x)}{D\ \sin(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{ax^{a-1} - a^x\ \log a)}{\cos(x-a)} = a^a(1-\log a).$$

Esercizio 15

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1.$$

Perché per $x \to= \infty$ $\dfrac{1}{x} \to 0+$,si applica quindi lo sviluppo del *logaritmo* (vedi (12)).

Esercizio 16 Scriviamo l'espressione nella forma

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\log\frac{x}{\sin x}}$$

e consideriamo l'argomento dell'esponenziale:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x-\sin x} \log\left(\frac{x}{\sin x}-1+1\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x-\sin x} \left[\frac{x}{\sin x}-1+o\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)\right] =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0+} \frac{o\left(\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}{\frac{x-\sin x}{\sin x}} = 1$$

Il valore del limite assegnato è quindi e.

Esercizio 17

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{1+x\log 2+o(x)-1}{1+x\log 4+o(x)-1-x\log 2+o(x)}\right) = \lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{x\log 2+o(x)}{x(\log 4-\log 2)+o(x)}\right) = 0$$

Perché

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\log 2+o(x)}{x(\log 4-\log 2)+o(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\log 2}{x\log 2} = 1$$

Esercizio 18

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{1+x\log 2+o(x)-1}{1+x\log 4+o(x)-1-x\log 3+o(x)}\right) = \lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{x\log 2+o(x)}{x(\log 4-\log 3)+o(x)}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{\log 2}{\log 4/3}\right)$$

Perché

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\log 2+o(x)}{x(\log 4-\log 3)+o(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\log 2}{x\log 4/3} = \frac{\log 2}{\log 4/3}.$$

Esercizio 19

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2^x-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x-1}{x}\right)^2 = (\log 2)^2$$

Esercizio 20

Applicando il *teorema dell'Hospital* si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}}{1} = +\infty$$

Perché assume la forma $\dfrac{1}{0+}$

Utilizzando invece lo sviluppo della funzione *logaritmo,* cioè $\log(1+y) = y + o(y)$, con $y = \sqrt{x^2+x}$, si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2+x} + o(\sqrt{x^2+x})}{x} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Esercizio 21

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x\ x^4} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 = 1$$

Esercizio 22

Poniamo $y = \arctan\dfrac{1}{x}$, quindi $x = \dfrac{1}{\tan y}$, in particolare per $x \to +\infty$ si ha che $y \to 0+$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Esercizio 23

Osserviamo che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$. Infatti basta porre $y = \arctan x$, da cui $x = \tan y$, di conseguenza per $x \to 0$ si ha che $y \to 0$. Il limite diventa $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\tan y} = 1$. Ragionando quindi come abbiamo fatto per ottenere gli sviluppi (12) si ha $\arctan x = x + o(x)$. Quindi il limite proposto si può risolvere nel modo che segue.

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{1-\cos x}{(\arctan x)^2}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{1-[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}{[x+o(x)]^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 24

Poniamo $y = \arccos x$, da cui $x = \cos y$. Per $x \to 1$ si ha che $y \to 0$. Il limite proposto si scrive nella forma

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 25

Poniamo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Di conseguenza per $x \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$. Il limite si scrive nella forma

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{-\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{y + o(y)}{-y - o(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{-y} = -1.$$

Perché (vedi Esercizio 22) $\arctan y = y + o(y)$.

Esercizo 26
Vedi la risoluzione dell'Esercizio 22

Esercizio 27
Osserviamo che posto $y = \sin x$ dalla scomposizione $\log(1+y) = y+o(y)$ (vedi (12)) otteniamo $\log(1+\sin^2 x) = \sin^2 x + o(\sin^2 x)$. Inoltre tenuto conto che $\sin^2 x = (x+o(x))^2 = x^2+2xo(x)+o(x^2) = x^2 + o(x^2)$, possiamo scrivere $\log(1 + \sin^2 x) = x^2 + o(x^2) + o(x^2 + o(x^2))$ da questa per (18) otteniamo $\log(1 + \sin^2 x) = x^2 + o(x^2)$. Di conseguenza il limite proposto diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Esercizio 28
Scriviamo lo sviluppo delle funzioni che compaiono nell'espressione (vedi (12) ed esercizi precedenti):

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + o(\sin x) = 1 + x + o(x) + o(x + o(x)) = 1 + x + o(x).$$

$$\log(1+2\sqrt{x^2 + x}) = 2\sqrt{x^2 + x} + o(\sqrt{x^2 + x}) = 2\sqrt{x}\sqrt{x + 1} + o(\sqrt{x}\sqrt{1 + x}) = 2\sqrt{x}\sqrt{1 + x} + o(\sqrt{x}).$$

Sostituendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}}{2\sqrt{x}\sqrt{1 + x} + o(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1 + x}} = 0.$$

Esercizio 29
Scriviamo lo sviluppo delle funzioni che compaiono nell'espressione (vedi (12) ed esercizi precedenti):

$$\log(1 + x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}\cos(\log(1 + x^2)) = \cos(x^2 + o(x^2)) &= 1 - \frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2} + o((x^2 + o(x^2))^2) = \\ &= 1 - \frac{x^4 + o(x^4)}{2} + o(x^4 + o(x^4)) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\end{aligned}$$

Perché $-\frac{o(x^4)}{2} + o(x^4 + o(x^4)) = o(x^4) + o(x^4) = o(x^4)$. Sostituiamo nel limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^4} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 30

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}\log x} = 0$$

Perché il limite assume la forma $e^{-\infty}$ in quanto $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{x}\log x = -\infty$, si tratta di una forma $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Eseercizio 31
Osserviamo che

$$\begin{aligned}(1+x)^x = e^{x\log(1+x)} &= 1 + x\log(1+x) + o(x\log(1+x)) = 1 + x[x+o(x)] + o(x[x+o(x)]) = \\ &= 1 + x^2 + o(x^2) + o(x^2+o(x^2)) = 1 + x^2 + o(x^2) + o(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Sostituamo nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Esercizio 32
Osserviamo che

$$\log\cos x = \log\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(\frac{x^2}{2} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Sostituiamo nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 33
Tenuto conto che

$$\begin{aligned}(\cos x)^x = e^{x\log(cos x)} &= 1 + x\log(\cos x) + o(x\log(\cos x)) = 1 + x\log\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] + \\ &+ o\left(x\log\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\right) = 1 + x\left[-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] + o\left(-x\left[\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\right) = \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3 + o(x^3)) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3),\end{aligned}$$

sostituamo nel limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \cancel{1}}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 47
Poiché per n che tende ad infinito $\frac{1}{n}$ tende a zero possimo sviluppare *cos* come segue

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Onde

$$\log\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \log\left[1-\frac{1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\;+\;o\left[\frac{1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{-1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il limite proposto si può scrivere nella forma

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]n^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2\,n^{2-x}}+n^x o\left(\frac{1}{n^2}\right)=0 \quad \text{se } x<2.$$

Se invece $x=2$ il valore del limite è $-\frac{1}{2}$. Se $x>2$ si invece

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]n^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^x}} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\,n^2}}{\frac{1}{n^x}} = -\infty$$

Esercizio 48

Sia $x>0$. Osserviamo che per $n\to+\infty$ $n^x\to+\infty$. Possiamo porre $y=n^x$ ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n^x}-2^{n^x}}{n^x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{3^y-2^y}{y} = \lim_{y\to+\infty}3^y\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^y}{y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{3^y}{y}=+\infty$$

perchè $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^y=0.$

Sia $x=0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n^0}-2^{n^0}}{n^0} = \lim_{n\to+\infty}1=1.$$

Sia $x<0$. Osserviamo in questo caso che per $n\to+\infty$ si ha $n^x=\frac{1}{n^{|x|}}\to 0$. (Ricordare che se $x<0$ allora $x=-|x|$) Possiamo porre $y=n^x$ ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n^x}-2^{n^x}}{n^x} = \lim_{y\to 0}\frac{3^y-2^y}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1+y\log 3+o(y)-1-y\log 2+o(y)}{y} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y(\log 3-\log 2)+o(y)}{y} =$$

(principio di sostituzione degli infinitesimi)

$$\lim_{y\to 0}\frac{y(\log 3-\log 2)}{y}=\log\frac{3}{2}.$$

Abbiamo utilizzato gli sviluppi (vedi (12))

$$3^y = 1 + y\log 3 + o(y), \qquad 2^y = 1 + y\log 2 + o(y.)$$

Esercizio 49

Osserviamo che se $x \leq 0$ il limite è banalmente 0. Se $x > 0$ si presenta invece una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ che risolviamo utilizziando lo sviluppo di *log* : $\log y = y + o(y)$ e ponendo $y = \dfrac{1}{n}$. Tenuto conto che per $n \to +\infty$ si ha $y \to 0^+$, il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{y+o(y)}{y^x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{y^x} = \lim_{y\to 0^+} y^{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Esercizio 50

Osserviamo che se $x \leq 0$ il limite è banalmente 0. Se $x > 0$ si presenta invece una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ che risolviamo utilizziando lo sviluppo di *sin* : $\sin y = y + o(y)$ e ponendo $y = \dfrac{1}{n}$. Tenuto conto che per $n \to +\infty$ si ha $y \to 0^+$, il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \sin\frac{1}{n^3} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^3+o(y^3)}{y^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{y^3}{y^x} = \lim_{x\to 0^+} y^{3-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{se } x < 3 \end{cases}.$$

Esercizio 51

Sia $x > 0$. Osserviamo che per $n \to +\infty$ $n^x \to +\infty$. Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-x}\left(2^{n^x}-1\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{2^y-1}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2^y}{y} - \frac{1}{y} = +\infty.$$

Sia $x = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-x}\left(2^{n^x}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^0\left(2^{n^0}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Sia $x < 0$. Osserviamo in questo caso che per $n \to +\infty$ si ha $n^x = \frac{1}{n^{|x|}} \to 0$. (Ricordare che se $x < 0$ allora $x = -|x|$) Possiamo porre $y = n^x$ ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-x}\left(2^{n^x}-1\right) = \lim_{y\to 0} \frac{2^y-1}{y} = \log 2.$$

(Vedi (12))

Esercizio 52

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \left(\sqrt[n]{n}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^x \left(e^{\frac{\log n}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n^x \left[\frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right]$$

Dove abbiamo utilizzato lo sviluppo $e^y = 1 + y + o(y)$, tenendo presente il fatto che, posto $y = \dfrac{\log n}{n}$, per $n \to +\infty$ si ha $y \to 0$.
Il principio di sostituzione degli infinitesimi ci consente di scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} n^x \left[\frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{\log n}{n}$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x-1} \log n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$