Analisi Matematica 1 – Foglio 1 – Lunedì 3 ottobre

Esercizio 1. Trovare il dominio naturale della funzione f data da

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2 - 6x + 5}\right).$$

Esercizio 2. Dire quali tra le seguenti funzioni sono iniettive :

1. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R}^*)$,
2. $g(x) = x^3 - 2$ $(x \in \mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \frac{(\tan x)^3 (\cos x)^2}{\sin x}.$$

1. Mostrare che $f(x) = \tan(x)\sin(x)$ per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. Mostrare che f è pari, cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Determinare se f è iniettiva.

Esercizio 4. Ammettiamo che le seguenti funzioni siano iniettive. Determinare le loro funzioni inverse.

1. f data da $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$.
2. g data da $g(x) = 2x^3 + 3$.

Esercizio 5. Scrivere la composizione $f \circ g$ e la composizione $g \circ f$ con i rispettivi domini.

1. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1.$
2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x - 2.$
3. $f(x) = \log(x - 4), \quad g(x) = x^2 + 1.$

Analisi Matematica 1 – Foglio 2 – Lunedì 10 ottobre

Esercizio 1. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 2. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$

$$k\binom{n}{k} \;=\; n\binom{k-1}{n-1},$$

e ne dedurre

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \;=\; n\;2^{n-1}.$$

Esercizio 3. Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$,

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \;=\; n\;2^{n-1},$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} \;=\; n(n+1)\;2^{n-2}.$

(Traccia : introdurre la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (1+x)^n$ e calcolare la sua derivata)

Esercizio 4. Calcolare $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+3)$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 5. Provare che

$$n! \;\geq 2^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Esercizio 6. Provare che

$$(1+x)^n \;\geq 1+nx \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq -1).$$

Esercizio 7. Sia $(F_n)_{n\geq 1}$ la successione di Fibonacci definita da

$$F_1 = F_2 = 1, \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ per ogni } n \geq 3.$$

Trovare un maggiorante di

$$\left\{ \frac{F_n}{2^n} \;;\; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 3 – Lunedì 17 ottobre

Esercizio 1.
Siano $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ due successioni di numeri reali che convergono rispettivamente a ℓ e ℓ' con $\ell < \ell'$. Mostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $u_n < v_n$ per ogni $n \geq N$.

Esercizio 2.
Mostrare che una successione $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ è convergente se e solo se è stazionaria, cioè esiste N tale che $u_n = u_N$ per ogni $n \geq N$.

Esercizio 3.
Sia $(u_n)_n$ una successione di numeri reali non nulli tale che

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Determinare il limite di $(u_n)_n$.

Soluzione
Per definizione della convergenza, esiste N tale che

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Quindi

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\ |u_n| \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

Usando questa disuguaglianza k volte troviamo

$$|u_{N+k}| \leq \frac{1}{2}\ |u_{N+k-1}| \leq \frac{1}{4}\ |u_{N+k-2}| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^k}\ |u_N| \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Si deduce (teorema del confronto)

$$\lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0,$$

e finalmente

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0.$$

Esercizio 4.
Siano $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ due successioni di numeri reali tali che

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Provare che $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ convergono a 0.

Soluzione
Usando l'identità $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ scriviamo

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = \left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3v_n^2}{4}.$$

Siccome il quadrato di un numero reale è positivo viene

$$\left(u_n + \frac{v_n}{2}\right)^2 + \frac{3v_n^2}{4} \;\geq\; \frac{3v_n^2}{4} \;\geq\; 0.$$

Il membro di sinistra tende a 0 quando n va a l'infinito. Il teorema del confronto da

$$\lim_{n \to +\infty} v_n^2 = 0,$$

dunque (la funzione radice quadrato è continua)

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

Per simmetria lo stesso argomento vale per $(u_n)_n$ cioè

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Esercizio 5.
Sia $a \in \mathbb{R}^*$ e sia $(u_n)_n$ la successione definita da $u_n = a^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Studiare la convergenza di $(u_n)_n$ al variare di a, e determinare il suo limite eventuale.

Esercizio 6.
Determinare il limite della successione $(u_n)_n$ definita da

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$ per ogni $n \geq 2$,
2. $u_n = \dfrac{1 - n + n^2}{1 + n + n^2}$ per ogni $n \geq 0$,
3. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{5^n + (-4)^n}$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 7. Determinare (usando disuguaglianze) il limite della successione $(u_n)_n$ definita da

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ per ogni $n \geq 2$,
2. $u_n = \dfrac{n\cos(n) - n}{n^2 + (-1)^n}$ per ogni $n \geq 2$,
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ per ogni $n \geq 1$,
4. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione

1. Dalla disuguaglianza
$$|\sin x| \ \leq \ 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$
viene
$$|u_n| \ \leq \ \frac{1}{n} \quad (\forall n \geq 2).$$
Concludiamo col teorema del confronto che
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

2. Abbiamo (disuguaglianza triangolare)
$$|\cos(x) - 1| \ \leq \ |\cos(x)| + 1 \ \leq \ 2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$
Si deduce
$$\begin{aligned} |u_n| \ &\leq \ \frac{2n}{|n^2 + (-1)^n|}, \\ &\leq \ \frac{2n}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$
Troviamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2 - 1} \ = \ \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n - \frac{1}{n}} \ = \ 0.$$
Concludiamo col teorema del confronto che
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3. Abbiamo
$$0 \ \leq \ \frac{n!}{n^n} \ = \ \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \ \leq \ \frac{1}{n}.$$
Passando al limite e applicando il teorema del confronto otteniamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

4. Scriviamo

$$0 \;\le\; \frac{e^n}{n!} \;=\; \frac{e}{1}\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{e}{3}\cdots\frac{e}{n} \;\le\; e\cdot\frac{e}{2}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2}.$$

Da $0 < \frac{e}{3} < 1$ viene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} = 0.$$

Il teorema del confronto implica

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!} = 0.$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 4 – Lunedì 24 ottobre

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti limiti :

1. $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$,
3. $\lim_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$,
4. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, (Traccia : utilizzare l'identità $(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \ \forall a,b \in \mathbb{R}$)

Esercizio 2.
Disegnare il grafico e studiare i punti di discontinuita della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$. Indichiamo con $\lfloor y \rfloor$ la *parte intera* di un numero reale y, cioè $\lfloor y \rfloor$ è il più grande numero intero inferiore o uguale a y : $\lfloor y \rfloor = \sup(n \in \mathbb{Z} \ ; \ n \leq y)$.

Esercizio 3.
Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & x \geq 1 \\ \\ -x+k & x < 1 \end{cases},$$

sia continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.
Determinare il dominio e studiare la continuità della funzione data da $f(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{\sqrt{3-\sin x}}$.

Esercizio 5.
Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su un intervallo I.
Mostrare che $\sup(f,g)$ è una funzione continua su I.

Soluzione
Fissiamo $x_0 \in I$ e mostriamo che $\sup(f,g)$ è continua in x_0. Per simplificare, supponiamo che

$$\sup(f(x_0), g(x_0)) = f(x_0).$$

Sia $\epsilon > 0$. Siccome f e g sono continue esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x-x_0| < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x)-f(x_0)| < \epsilon \\ \text{e} \\ |g(x)-g(x_0)| < \epsilon \end{cases}.$$

Se $\sup(f(x), g(x)) = f(x)$ allora

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Se $\sup(f(x), g(x)) = g(x)$ allora

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |g(x) - f(x_0)|,$$

ma abbiamo

$$f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq g(x_0) + \epsilon \leq f(x_0) + \epsilon$$

dunque

$$|g(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Questo vale per ogni $\epsilon > 0$, quindi mostra che $\sup(f, g)$ è continua in x_0.

Altra soluzione

Fissiamo $x_0 \in I$ e mostriamo che $\sup(f, g)$ è continua in x_0.

Caso 1. Supponiamo $f(x_0) > g(x_0)$, allora per continuità esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2} \\ \text{e} \\ |g(x) - g(x_0)| < \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2} \end{cases}.$$

Questo implica che $\sup(f, g) = f$ sull'intervallo $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Si deduce che f è continua su $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ dunque in x_0. Lo stesso argomento funziona se $g(x_0) < f(x_0)$.

Caso 2. Supponiamo $f(x_0) = g(x_0)$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \\ \text{e} \\ |g(x) - g(x_0)| < \epsilon \end{cases}.$$

Chiaramente

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| = |f(x) - f(x_0)| \text{ o } |g(x) - g(x_0)|$$

quindi

$$|\sup(f(x), g(x)) - \sup(f(x_0), g(x_0))| < \epsilon.$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 5 – Lunedì 7 novembre

Esercizio 1.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = e^x - 2x^2 - \frac{1}{2}$.
Mostrare che f si annulla sugli intervalli $]-1, 0[$, $]0, 2]$ e $]2, 3[$.

Esercizio 2.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{-\infty} f = -1$ e $\lim_{+\infty} f = +1$.
Mostrare che f si annula in almeno un punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.
Sia $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali di grado n dispari.
Mostrare che f si annulla in almeno un punto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.
Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Mostrare che f fissa un punto di $[0, 1]$.

Esercizio 5.
Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallo) due funzioni continue tali che

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

Mostrare che $f = g$ o $f = -g$.

Esercizio 6.
Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $p, q \in \mathbb{R}_+$. Mostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Esercizio 7.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funziona continua e periodica. Mostrare che f è limitata.

Soluzione : Sia $T > 0$ tale che

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allora abbiamo

$$f([nT, (n + 1)T]) = f([0, T]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Della decomposizione

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [nT, (n + 1)T],$$

si deduce

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f([nT, (n + 1)T]), \\ f(\mathbb{R}) &= f([0, T]). \end{aligned}$$

Siccome f è continua l'immagine $f([0, T])$ è un intervallo chiuso e limitato. Quindi $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ è un intervallo chiuso e limitato, dunque f è limitata.

Esercizio 8.
Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Mostrare che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono limitate.

Soluzione : Visto che f è limitata, esiste $A > 0$ tale che

$$f(\mathbb{R}) \subset [-A, A].$$

Allora abbiamo

$$(f \circ g)(\mathbb{R}) = f(g(\mathbb{R})) \subset f(\mathbb{R}) \subset [-A, A].$$

cioè $f \circ g$ è limitata. Da un'altra parte

$$(g \circ f)(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R})) \subset g([-A, A]),$$

e $g([-A, A])$ è un intervallo chiuso e limitato poiché g è continua su $[-A, A]$. Si conclude che $g \circ f$ è limitata.

Esercizio 9.
Studiare la successione $(u_n)_n$ definita da $u_0 \geq 1$ e $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione : Introduciamo la funzione $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ definita da

$$f(x) = 1 + \ln x \quad \forall x \geq 1.$$

Si vede facilmente che

$$f(x) \quad < \quad x \quad \forall x > 1. \tag{1}$$

Infatti $f(1) = 1$ e la funzione $x \mapsto f(x) - x$ è strettamente decrescente su $]1, +\infty[$ visto che la sua derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) - x = \frac{1}{x} - 1$$

è negativa sur $]1, +\infty[$.

Viene di (1) che la successione $(u_n)_n$ è decrescente e limitata, dunque converge verso un limite $\ell \geq 1$. Prendendo il limite a sinistra e a destra dell'equazione $u_{n+1} = f(u_n)$ otteniamo

$$\ell = f(\ell),$$

dato che f è continua. L'unica soluzione di questa equazione è $\ell = 1$, dunque il limite di $(u_n)_n$ è 1.

Esercizio 10.
Determinare il limite della successione $(u_n)_n$ definita da $u_0 > 0$ e $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione : Siano $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ le funzioni definite da

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) - x \quad (\forall x \geq 0).$$

Queste funzioni sono continue e derivabili, più precisamente

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad (\forall x \geq 0).$$

Viene che g è strettamente decrescente su $\mathbb{R}_+$ e soddisfa $g(0) = 0$. Quindi $g(x) < 0$ per ogni $x > 0$, cioè

$$f(x) < x \quad (\forall x > 0).$$

Questo implica che $(u_n)_n$ è decrescente, dunque convergente poichè $u_n \geq 0$. Sia ℓ il limite di $(u_n)_n$, per continuita di f abbiamo

$$\ell \geq 0 \quad \text{e} \quad f(\ell) = \ell.$$

Questa equazione ha 0 come unica soluzione, concludiamo che $\ell = 0$.

Esercizio 11. Determinare i seguenti limiti :

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!}$$

Soluzione : 1. Abbiamo

$$\frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} = \frac{n!}{1} \cdot \frac{n!}{2} \cdots \frac{n!}{2^n}.$$

Usando il fatto che $4 = 2 \cdot 2$ viene

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdots 2 = 2^n$$

per ogni $n \geq 4$. Dunque

$$\frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} \geq \frac{2^n}{1} \cdot \frac{2^n}{2} \cdots \frac{2^n}{2^n} = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdots 2 \cdot 1 \geq 2^n$$

per ogni $n \geq 4$. Si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2^n}}{(2^n)!} = +\infty.$$

2. Nel prodotto $(n!)^{2n}$ ci sono $2n^2$ fattori. Per n abbastanza grande abbiamo $2^n \geq 2n^2$ e

$$\begin{aligned}
(2^n)! &= \left(\prod_{k=0}^{2n-1} [(kn+1)\cdots(kn+n)] \right) \cdot (2n^2+1) \cdot (2n^2+2) \cdots 2^n, \\
&\geq (n!)^{2n} \cdot (2n^2+1) \cdot (2n^2+2) \cdots 2^n, \\
&\geq (n!)^{2n} \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Si conclude che

$$\frac{1}{2^n} \geq \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!} \geq 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{2n}}{(2^n)!} = 0.$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 6 – Lunedì 14 novembre

Esercizio 1.
Determinare il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{4x}$.

Esercizio 2.
Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sull'intervallo $[-\frac{1}{2}, 4]$.

Esercizio 3.
Determinare i punti della curva d'equazione $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ in cui la retta tangente è orizzontale.

Esercizio 4.
Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f_\lambda(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Mostrare che le rette tangenti ai grafici delle funzioni f_λ in $x = 0$ sono parallele.
2. Mostrare che le rette tangenti ai grafici delle funzioni f_λ in $x = 1$ sono concorrenti.

Esercizio 5.
Calcolare la n–esima derivata della funzione $f(x) = xe^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6.
Per le seguenti funzioni determinare il dominio di esistenza della derivata e la calcolare.

$$x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}, \quad x \mapsto x^x, \quad x \mapsto \ln|x|, \quad x \mapsto \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2.$$

Esercizio 7.
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva su un intervallo aperto I.
Consideriamo un punto $a \in I$ tale che f sia derivabile in a con $f'(a) \neq 0$.

1. Mostrare che f^{-1} è continua in $f(a)$. (Potete ammettere questo se è troppo difficile)
2. Mostrare che f^{-1} è derivabile in $f(a)$ e stabilire la formula
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$
3. Calcolare la derivata della funzione $\arctan : \mathbb{R} \to]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soluzione : 1. Vogliamo mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$|y - f(a)| \leq \eta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - a| \leq \epsilon.$$

Notiamo che l'implicazione sopra è equivalente a

$$y \in [f(a) - \eta, f(a) + \eta] \Longrightarrow y \in f([a - \epsilon, a + \epsilon]),$$

ma questa implicazione è ovviamente equivalente a

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

Quindi dobbiamo mostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

Fissiamo $\epsilon > 0$. Visto che f è continua l'immagine $f([a - \epsilon, a + \epsilon])$ è un intervallo contenendo $f(a)$. Inoltre $f(a)$ non è un estremo di questo intervallo, altrimenti $f(a)$ sarebbe un estremo relativo di f e avremmo $f'(a) = 0$ (principio di Fermat). Concludiamo che esiste $\eta > 0$ tale che

$$[f(a) - \eta, f(a) + \eta] \subset f([a - \epsilon, a + \epsilon]).$$

2. Vogliamo mostrare che

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Chiaramente

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)}.$$

Poniamo $x = f^{-1}(y)$, allora $y = f(x)$ e

$$\frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Finalmente troviamo

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

L'uguaglianza tra i due limiti viene dal fatto che $x \to a$ quando $y \to f(a)$ (continuità di f^{-1} in $f(a)$).

3. Dalla formula del 2. viene

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \qquad \Big(\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\Big)$$

Si deduce

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 7 – Lunedì 21 novembre

Esercizio 1.
Sia $a > 0$, e sia $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$f(0) = f(a) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$

1. Mostrare che la derivata di $x \mapsto f(x)/x$ si annula in un punto $c \in]0, a[$.
2. Mostrare che la tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ passa per l'origine.

Soluzione. 1. Sia $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ se } x \in]0, a] \quad \text{e} \quad g(0) = 0.$$

Questa funzione e derivabile su $]0, a]$ e continua su $[0, a]$ visto che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$$

Notiamo che $g(0) = g(a) = 0$. Secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]0, a[$ tale che $f'(c) = 0$.
2. L'equazione della tangente al grafico di f in $(c, f(c))$ è

$$y = f'(c)\ x + (f(c) - cf'(c)).$$

La derivata di g è data da

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad \forall x \in]0, a].$$

Quindi $g'(c) = 0$ è equivalente a $cf'(c) - f(c) = 0$. Troviamo che l'equazione della tangente è

$$y = f'(c)\ x.$$

Si vede che la tangente passa per l'origine.
Nota : la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ da il coefficiente angolare della retta che passa tra l'origine e $(x, f(x))$.

Esercizio 2. (Regola di de L'Hôpital)
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Supponiamo che

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

1. Mostrare che $g(a) \neq g(b)$.
2. Mostrare che esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Soluzione. 1. Supponiamo che $g(a) = g(b)$, allora secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'(c) = 0$, contraddizione. Quindi $g(a) \neq g(b)$.
2. Sia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x) = (f(b) - f(a))\ g(x) - (g(b) - g(a))\ f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Questa funzione è derivabile su $[a, b]$ e $h(a) = h(b) = 0$. Secondo il teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$h'(c) = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} (f(b) - f(a))\ g'(c) - (g(b) - g(a))\ f'(c) &= 0, \\ (f(b) - f(a))\ g'(c) &= (g(b) - g(a))\ f'(c), \\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Lo scopo dell'esercizio è quello di stabilire i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\beta x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha.$$

Supponiamo $\beta > 0$, e consideriamo la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^\alpha e^{\frac{\beta}{2}x} \quad \forall x > 0.$$

1. Mostrare che esiste $A > 0$ tale che f sia crescente su $[A, +\infty[$.
2. Mostrare che $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{\beta x} = +\infty$ usando 1.
3. Concludere.

Esercizio 4. Discutere il comportamento delle seguenti serie e calcolarne la somma.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad \sum_{n\geq 0} (\ln \alpha)^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+\alpha)^n} \quad (\alpha > 0).$$

Esercizio 5. Verificare che le seguenti serie non convergono :

$$\sum_{n\geq 0} n^n e^{-n}, \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^2 - n}{2n^2 + 1}, \quad \sum_{n\geq 0} \sin n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Analisi Matematica 1 – Foglio 8 – Lunedì 12 dicembre

Esercizio 1.
Calcolare il polinomio di Taylor

1. di grado 3 di $f(x) = e^x \cos x$ in 0,
2. di grado 4 di $f(x) = (\ln(1+x))^2$ in 0,
3. di grado 4 di $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ in 0,
4. di grado 4 di $f(x) = \ln(\cos^2(x))$ in 0.

Esercizio 2.
Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 in 1 della funzione f nei casi seguenti :

1. $f(x) = \sqrt{x}$,
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$,

Esercizio 3.
Determinare i seguenti limiti :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x^x} + \frac{1}{x \ln x}$.

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 di f in 0.
2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, f(0))$.
   Qual'è la posizione del grafico rispetto alla retta tangente ?
3. Determinare l'equazione della retta asintotica al grafico di f in $+\infty$.
   Qual'è la posizione del grafico rispetto alla retta asintotica ?

Esercizio 5.
Calcolare gli seguenti integrali :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, 3. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t$ 5. $\displaystyle\int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ 6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.

Analisi Matematica 1 – Foglio 8 (Soluzioni) – Lunedì 12 dicembre

Esercizio 1.

1. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ in 0,
2. $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$ in 0,
3. $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)$ in 0.
4. $\ln(\cos^2(x)) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ in 0,

Esercizio 2.

1. $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ in 1,
2. $e^{\sqrt{x}} = e + \frac{e}{2}(x-1) + o((x-1)^2)$.

Esercizio 3.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x^x} + \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

1. $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ in 0.
2. La retta d'equazione $y = ax + b$ è tangente al grafico di f in $(0, f(0))$ se e solo se

   $$f(x) - (ax+b) = o(x) \quad \text{in } 0.$$

   Quindi l'equazione della retta tangente è data dal polinomio di Taylor di grado 1, cioè $y = \frac{x}{2} + 1$. Abbiamo $f(x) - (\frac{x}{2} + 1) = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ e il grafico di f è sopra la retta tangente all'intorno di 0.
3. Abbiamo $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quindi la retta d'equazione $y = x + \frac{1}{2}$ è asintotica al grafico di f in $+\infty$. Il grafico è sopra la retta asintotica all'intorno di $+\infty$.

Esercizio 5.

1. $\dfrac{1}{2}$ 2. $\dfrac{\pi}{4}$ 3. $\dfrac{\pi}{6}$ 4. π 5. $2\ln 2 - 1$ 6. $\sqrt{2} - 1$

Analisi Matematica 1 – Foglio 9 – Lunedì 19 dicembre

Esercizio 1.
Calcolare gli integrali

$$1.\ \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 2.\ \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 3.\ \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 2.

1. Mostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$,
2. Ne dedurre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Esercizio 3.
Calcolare

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 4.
Calcolare per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Esercizio 5.
Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri :

$$1.\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}, \qquad 2.\ \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\ \mathrm{d}t, \qquad 3.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$

$$4.\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\ \mathrm{d}t, \qquad 5.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t, \qquad 6.\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t$$

Esercizio 6.
Poniamo per ogni $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Mostrare che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Ne dedurre il limite della successione $(S_n)_n$.
3. Poniamo $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ per ogni $n \geq 1$. Mostrare che $(u_n)_n$ converge.
4. Provare che $S_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ quando n tende a $+\infty$.
5. Ottenere la stessa formula $S_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ usando integrali.

Esercizio 7.
Poniamo per ogni $n \geq 1$:

$$S_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Usando integrali mostrare

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n \quad (\forall n \geq 1),$$

e ne dedurre

$$S_n = \ln n + o(\ln n)$$

quando n tende a $+\infty$.

2. Sia

$$u_n = S_n - \ln n \quad (\forall n \geq 1).$$

Mostrare che $(u_n)_n$ è decrescente e converge a un limite che si chiama la *costante* γ *di Eulero*.

Soluzione esercizio 1 : 1. $\pi/4$ 2. $\pi/16$ 3. $2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$.

Soluzione esercizio 2 : 2. $\pi/4$.

Soluzione esercizio 3 : $\ln 2 - 2 + \pi/2$.

Soluzione esercizio 4 : $I_n = n!$.

Soluzione esercizio 5 : 1. diverge 2. converge 3. converge 4. converge 5. converge 6. converge.