

Esercizi per il Corso di Istituzioni di Matematica

Limiti e continuità di funzioni.

1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Dire se f è continua e descrivere, se esiste, l'inversa di f .

2) Dire se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità su tutto l'asse reale:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right); & b) g(x) &= \frac{1}{x} \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right); \\ c) h(x) &= \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}; & d) \phi(x) &= x \log(|x|) + e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

3) Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}; & b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}; \\ c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}; & d) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}; \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}; & f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}; \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}; & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}. \end{aligned}$$

4) Dare un esempio di funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} tale che

- abbia asintoto obliquo $y = -3x$ a $+\infty$ ed asintoto $y = -10$ a $-\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow e^+} = \log(2)$ e $\lim_{x \rightarrow e^-} = -\infty$ ed abbia estremo superiore 1;
- abbia un massimo assoluto, due massimi locali e non ammetta minimo assoluto;
- sia continua, limitata e non ammetta limite a $+\infty$;
- sia continua, non limitata inferiormente ne' superiormente e non ammetta limite a $-\infty$.