Risoluzione dei tests

Test 1

1.1 Per una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 la condizione sufficiente ad assicurare che x_0 sia un punto di minimo locale è la seguente: $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0)$ definita positiva ossia con tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

1.2 Se $f(x,y) = h \circ g(x,y)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2-y^2} \cos(x^2-y^2+xy) - e^{x^2-y^2}(\sin(x^2-y^2+xy))(2x+y)$$

1.3 Per calcolare la lunghezza della curva, visto che

$\gamma'(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, \sqrt{3}]$ si svolge l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^2+t^4}\, dt = \dots = \frac{7}{3}$$

1.4 Si integra la funzione data prima rispetto a z, poi rispetto ad y ed infine rispetto ad x:

$$\iiint\limits_{\substack{[0,1]\times[0,2]\times[0,1] \\ x \quad\quad y \quad\quad z}} y x^2 e^{xyz}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} x \left(e^{xyz} \Big|_0^1 \right) dx\, dy =$$

②

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \; x\cdot\left(e^{xy} - 1\right) = \int_0^1 \left(e^{xy}\Big|_0^2 - xy\Big|_0^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{2x} - 1 - 2x\right) dx = \frac{e^{2x}}{2} - x - x^2 \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2 =$$

$$= \frac{e^2 - 5}{2}$$

1.5 Si calcola $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) = (1, v, v^2)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, u, 2uv)$

$\Phi(1,0) = P \implies \frac{\partial \Phi}{\partial u}(1,0) = (1,0,0)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0,1,0)$

la retta normale in P è generata quindi dalla direzione

$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(1,0) \implies$ un versore normale è $(0,0,1)$

(anche $(0,0,-1)$ è un versore della retta normale al piano tg in P).

1.6 Dato $F(x,y,z) = \left(x + e^{xy}, \, y \ln(1 + x^2 z^2), \, \sqrt{y^2+z^2}\right)$

si calcola $\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$ da cui

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{2x^2yz}{1+x^2z^2}, \, 0, \, \frac{2xyz^2}{1+x^2z^2} - x e^{xy} \right)$$

Test 2

2.1 Per una $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 un pto x_0 è di sella se la matrice Hessiana $Hf(x_0)$ ha 2 dei suoi autovalori di segno discorde in un punto x_0 in cui $\nabla f(x_0) = 0$, ossia valgono le proprietà: $\nabla f(x_0) = 0$ ed esistono $\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}}$ autovalori di $Hf(x_0)$ con $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\bar{\lambda}} < 0$.

2.2
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \cos(x^2 - y^2 + xy) - e^{xy}(\sin(x^2 - y^2 + xy))(2x + y)$$

2.4 Analogamente a quanto fatto nel test 1 si integra una variabile alla volta e si ottiene:

$$\iiint_{\substack{[0,2] \times [0,1] \times [0,2] \\ x \quad\quad y \quad\quad z}} x z^2 e^{xyz} \, dx\, dy\, dz = \frac{e^4 - 13}{2}$$

2.3 Analogamente a quanto fatto nel test 1 si calcola
$$\gamma'(t) = \left(e^t, e^{\frac{3t}{2}}\right) \quad e \quad \int_{\ln(3)}^{\ln(8)} \|\gamma'(t)\| dt = \frac{38}{3}$$

2.5 Poiché $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, 2uv)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 2v, u^2)$

Si ha $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0,1) = (1,0,0)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 0, 1)$

da cui $n(P=\varphi(0,1)) = \pm(0,0,1)$.

2.6

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\ln(1+x^2z^2) - \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},\ y e^{yz} - \frac{2xyz^2}{1+x^2z^2},\ -z e^{yz} \right).$$

test 3

3.1 Per una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 se x_0 è un punto di massimo locale per f la sua matrice hessiana $Hf(x_0)$ deve avere tutti gli autovalori ≤ 0, ossia la forma quadratica associata alla matrice $Hf(x_0)$ deve essere semidefinita negativa.

3.2

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} \sin(x^2-y^2-xy) + e^{xy}(\cos(x^2-y^2-xy))(2x-y)$$

3.3 Si ha $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $f(t) = 2t\sqrt{t}$ $t \in [0, \frac{1}{3}]$

da cui $\gamma'(t) = (1, 3\sqrt{t})$ e

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \frac{26}{3}$$

3.4

$$\iiint_{\underset{x}{[0,2]} \times \underset{y}{[0,1]} \times \underset{z}{[0,1]}} z y^2 e^{xyz}\, dx\, dy\, dz = \frac{e^2-5}{4}$$

3.5 $$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (0, 2u, v^2), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1, 0, 2uv)$$

$\rightsquigarrow$ $$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(1,0) = (0, 2, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(1,0) = (1,0,0)$$

da cui $n(P = \varphi(1,0)) = \pm (0,0,1)$.

3.6 $$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2xy^2z}{1+y^2z^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 + ye^{xy} - \frac{2xyz^2}{1+y^2z^2} \right)$$

test 4

4.1 Per una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 se x_0 è un punto di minimo locale per f la sua matrice hessiana $Hf(x_0)$ deve avere tutti gli autovalori ≥ 0, ossia la forma quadratica associata ad $Hf(x_0)$ deve essere semidefinita positiva.

4.2 $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x^2-y^2} \sin(x^2-y^2-xy) + e^{x^2-y^2}(\cos(x^2-y^2-xy))(2x-y)$$

4.3 Si ha $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $f(t) = \frac{1}{3}(2t)^{3/2}$ $t \in [0,4]$

da cui $\gamma'(t) = (1, \sqrt{2t})$

e $\int_0^4 \|\gamma'(t)\| dt = \frac{14}{27}$

4.4 $\iiint_{\underset{x}{[0,1]}\times\underset{y}{[0,2]}\times\underset{z}{[0,1]}} z x^2 e^{xyz}\, dx\, dy\, dz = \frac{e^2-5}{4}$

4.5 $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, 2uv)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 2v, u^2)$

da cui $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0,1) = (1,0,0)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(0,1) = (0,2,0)$

e $n(P=\varphi(0,1)) = \pm(0,0,1)$.

4.6

$$\text{rot}\, F = \left(\frac{2xyz^2}{1+x^2z^2} - y e^{yz},\ \ln(1+y^2z^2),\ 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

(nella versione data allo scritto era necessario calcolare

la $\text{div}\, F = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z e^{yz} + \frac{2xy^2z}{1+y^2z^2}$ ma la versione

ufficiale aveva il rotore per tutti i tests).